

BÙI VĂN TUYÊN (Chủ biên) – NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

**16 CHUYÊN ĐỀ**  
**ÔN THI VÀO LỚP 10**  
**MÔN TOÁN**

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



# LỜI NÓI ĐẦU

---

Các thầy cô giáo và các em học sinh thân mến!

Thầy, cô và các em đang cầm trên tay cuốn sách **16 chuyên đề ôn thi vào lớp 10 – môn Toán**. Đây là cuốn sách được viết ra với mong muốn giúp cho giáo viên và học sinh có thêm tư liệu để ôn luyện, nâng cao kiến thức Toán THCS (đặc biệt là lớp 9) với những trọng tâm cơ bản, thường gặp trong các đề thi học sinh giỏi lớp 9, các đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT và THPT Chuyên của các tỉnh, thành phố. Với mục đích đó, các tác giả biên soạn cuốn sách không chỉ dừng lại ở việc cung cấp một hệ thống kiến thức cần, đủ, sâu, rộng mà còn chú ý tới cả việc hướng dẫn học sinh cách tự học, tự rèn luyện các kĩ năng làm bài để tự tin bước vào kì thi.

Cuốn sách **16 chuyên đề ôn thi vào lớp 10 – môn Toán** gồm 4 phần :

*Phần một.* Các chuyên đề Đại số

*Phần hai.* Các chuyên đề Hình học

*Phần ba.* Một số đề tham khảo

*Phần bốn.* Hướng dẫn giải - Đáp số.

Ở hai phần đầu, mỗi chuyên đề bao gồm các mục :

*A. Kiến thức cần nhớ :* Phần này tổng kết những kiến thức cơ bản, những kiến thức bổ sung cần thiết để có thể giải được các ví dụ, bài tập, các dạng toán của chuyên đề.

*B. Một số ví dụ :* Phần này trình bày những ví dụ chọn lọc minh họa cho những dạng toán điển hình của chuyên đề với cách trình bày lời giải chuẩn mực kèm theo những *nhận xét, lưu ý, bình luận,...* về phương pháp giải, về các sai lầm thường gặp của học sinh, về việc tìm tòi thêm các cách giải khác,...

*C. Bài tập :* Phần này đưa ra hệ thống các bài tập được phân loại theo các dạng toán để học sinh dễ sử dụng. Nhiều bài tập được lấy từ đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT và THPT Chuyên của các tỉnh, thành phố.

Phần ba giới thiệu 10 đề thi có cấu trúc và mức độ tương tự các đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT của các tỉnh, thành phố, trong đó có một số đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên những năm gần đây.

Cuối cùng là những gợi ý, hướng dẫn giải bài tập và đáp án các đề thi để học sinh có thể tự kiểm tra, tự đánh giá kiến thức, kĩ năng của mình.

Hi vọng cuốn sách **16 chuyên đề ôn thi vào lớp 10 – môn Toán** sẽ là một món quà bổ ích, một người bạn đồng hành trong quá trình giảng dạy, học tập và ôn luyện của các thầy cô giáo và các em học sinh. Mặc dù các tác giả đã hết sức cố gắng trong quá trình biên soạn, song cuốn sách không thể tránh khỏi những sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của các thầy cô giáo và các em học sinh để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong những lần tái bản. Xin trân trọng cảm ơn!

Các góp ý xin gửi về :

Ban Toán-Tin, Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, Hà Nội.

**Các tác giả**

# PHẦN MỘT. CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ

## Chuyên đề 1

### RÚT GỌN VÀ TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

#### A. Kiến thức cần nhớ

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai ta vận dụng thích hợp các phép tính về căn thức và các phép biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai. Khi phối hợp các phép biến đổi căn thức với các biến đổi biểu thức có dạng phân thức cần chú ý :

– Trước tiên cần tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) đối với căn thức cũng như đối với phân thức.

$$\sqrt{A} \text{ có nghĩa khi } A \geq 0.$$

Ví dụ,  $\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$  có nghĩa khi  $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

– Điều kiện để bỏ dấu giá trị tuyệt đối :

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$$

– Kết quả rút gọn để ở dạng nào là tùy thuộc vào yêu cầu cụ thể của bài toán.

Ví dụ : Sau khi thực hiện các phép tính và rút gọn kết quả được

$$P = \frac{x - 4\sqrt{x} + 3}{x - 1} \text{ (mẫu thức không chứa dấu căn).}$$

Ta cần rút gọn tiếp

$$P = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} \text{ (với điều kiện } x \neq 1).$$

Đến đây có thể giải tiếp được những câu hỏi tiếp theo, như tìm  $x$  để :

- $P$  có giá trị dương ;
- $P$  có giá trị bằng  $k$  ;
- $P$  có giá trị nhỏ nhất,...

## B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ .

*Giải*

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1} - \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3} \\&= \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} - \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} \\&= |\sqrt{3} - 1| - |2 + \sqrt{3}| \\&= \sqrt{3} - 1 - (2 + \sqrt{3}) = -3.\end{aligned}$$

*Nhận xét* : Các biểu thức  $4 - 2\sqrt{3}$  ;  $7 + 4\sqrt{3}$  đều có dạng  $m \pm p\sqrt{n}$  trong đó  $p\sqrt{n} = 2ab$  với  $a^2 + b^2 = m$ . Những biểu thức như vậy đều viết được dưới dạng bình phương của một biểu thức.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức  $B = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ .

*Giải*

*Cách thứ nhất :*

$$\begin{aligned}B &= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} \\&= |\sqrt{3} + \sqrt{2}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} + \sqrt{2} - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

*Cách thứ hai :*

$$B = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } B^2 &= 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})} \\&= 10 - 2\sqrt{1} = 8.\end{aligned}$$

Vì  $B > 0$  nên  $B = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

*Nhận xét* : Các biểu thức  $5 + 2\sqrt{6}$  và  $5 - 2\sqrt{6}$  là hai biểu thức liên hợp. Gặp những biểu thức như vậy, để tính B ta có thể tính  $B^2$  trước rồi sau đó suy ra B.

**Ví dụ 3.** Rút gọn biểu thức

$$C = \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}.$$

**Giải.** ĐKXD:  $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+2-2\sqrt{x+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+2 \geq 2\sqrt{x+1}. \end{cases}$

Với  $x \geq -1$  thì  $x+2 \geq 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow (x+2)^2 \geq 4(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \geq 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$  (luôn đúng).

Vậy ĐKXD là  $x \geq -1$ .

*Cách thứ nhất:*

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{x+1+2\sqrt{x+1}+1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} \\ &= |\sqrt{x+1}-1| + |\sqrt{x+1}+1|. \end{aligned}$$

• Nếu  $\sqrt{x+1} \geq 1$  (hay  $x+1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ )

thì  $C = \sqrt{x+1} - 1 + \sqrt{x+1} + 1 = 2\sqrt{x+1}$ .

• Nếu  $0 \leq \sqrt{x+1} < 1$  (hay  $0 \leq x+1 < 1 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0$ )

thì  $C = 1 - \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} + 1 = 2$ .

*Cách thứ hai:*

Ta có

$$\begin{aligned} C^2 &= x+2-2\sqrt{x+1} + x+2+2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{(x+2)^2-4(x+1)} \\ &= 2x+4 + 2\sqrt{x^2+4x+4-4x-4} \\ &= 2x+4 + 2\sqrt{x^2} = 2x+4+2|x|. \end{aligned}$$

• Nếu  $x \geq 0$  thì  $C^2 = 4(x+1)$  suy ra  $C = 2\sqrt{x+1}$  (vì  $C > 0$ ).

• Nếu  $-1 \leq x < 0$  thì  $C^2 = 2x+4-2x=4$  suy ra  $C = 2$  (vì  $C > 0$ ).

**Ví dụ 4.** Chứng minh các đẳng thức :

$$\text{a) } \left( \frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{2\sqrt{2} - 2} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{2\sqrt{3} - 2} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = 1 ;$$

$$\text{b) } \frac{4}{3 + \sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5} - 1} - \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = 7.$$

**Giải.** a) Xét vế trái T

$$\begin{aligned} T &= \left[ \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2} - 1)}{2(\sqrt{2} - 1)} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} - 1)}{2(\sqrt{3} - 1)} \right] : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \\ &= \left[ \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right] \cdot \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{1} \\ &= \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{1} \\ &= \frac{7 - 5}{2} \\ &= 1 = \text{VP.} \end{aligned}$$

b) Xét vế trái T

$$\begin{aligned} T &= \frac{4(3 - \sqrt{5})}{4} + \frac{8(\sqrt{5} + 1)}{4} - |2 - \sqrt{5}| \\ &= 3 - \sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2 - (\sqrt{5} - 2) \\ &= 7 = \text{VP.} \end{aligned}$$

**Nhận xét :** Cách giải trên khá đơn giản nhờ có việc trục căn thức ở mẫu. Nếu quy đồng mẫu số thì việc thực hiện các phép tính rất phức tạp.

**Ví dụ 5.** Cho biểu thức  $P = \frac{3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{2\sqrt{x} - 3}{3 - \sqrt{x}} - \frac{3(3\sqrt{x} - 5)}{x - 2\sqrt{x} - 3}$ .

a) Rút gọn P ;

b) Tìm giá trị của P, biết  $x = 4 + 2\sqrt{3}$  ;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

**Giải.** ĐKXĐ :  $x \geq 0$  ;  $x \neq 9$ .



$$\begin{aligned}
\text{a) } P &= \frac{3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3(3\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} \\
&= \frac{(3\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3) + (2\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1) - 3(3\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} \\
&= \frac{3x - 9\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 6 + 2x + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3 - 9\sqrt{x} + 15}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} \\
&= \frac{5x - 17\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} \\
&= \frac{5x - 15\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} \\
&= \frac{(\sqrt{x} - 3)(5\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} \\
&= \frac{5\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}.
\end{aligned}$$

b) Ta có  $x = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + 1$ .

$$\begin{aligned}
\text{Do đó } P &= \frac{5(\sqrt{3} + 1) - 2}{\sqrt{3} + 1 + 1} = \frac{5\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 2} = \frac{(5\sqrt{3} + 3)(2 - \sqrt{3})}{(\sqrt{3} + 2)(2 - \sqrt{3})} \\
&= 7\sqrt{3} - 9.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) Ta có } P &= \frac{5\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{5\sqrt{x} + 5 - 7}{\sqrt{x} + 1} \\
P &= 5 - \frac{7}{\sqrt{x} + 1}.
\end{aligned}$$

Vì  $\frac{7}{\sqrt{x} + 1} > 0$  nên  $P$  có giá trị nhỏ nhất  $\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x} + 1}$  lớn nhất

$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow x = 0$ .

Khi đó  $\min P = 5 - 7 = -2$ .

**Ví dụ 6.** Cho biểu thức

$$Q = \left( \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{5\sqrt{x} + 2}{4 - x} \right) : \frac{3\sqrt{x} - x}{x + 4\sqrt{x} + 4}$$

a) Rút gọn Q ;

b) Tìm x để Q = 2 ;

c) Tìm các giá trị của x để Q có giá trị âm.

**Giải.** ĐKXD :  $x > 0$  ;  $x \neq 4$  ;  $x \neq 9$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } Q &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) - (5\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} : \frac{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x})}{(\sqrt{x} + 2)^2} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2 - 2x + 4\sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x})} \\ &= \frac{-x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x})} \\ &= \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x})} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} \end{aligned}$$

$$\text{b) } Q = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = 2\sqrt{x} - 6$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x} = -8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64 \text{ (thỏa mãn ĐKXD).}$$

$$\text{c) } Q < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 < 0 \text{ (vì } \sqrt{x} + 2 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9.$$

Kết hợp với ĐKXD ta có  $Q < 0$  khi  $0 < x < 9$  và  $x \neq 4$ .

### C. Bài tập

#### 1. Rút gọn biểu thức

a)  $\frac{15}{\sqrt{6}-1} + \frac{8}{\sqrt{6}+2} + \frac{6}{3-\sqrt{6}} - 9\sqrt{6}$  ;

b)  $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ .

#### 2. Tính

a)  $\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}}$  ;

b)  $\sqrt{(\sqrt{5}+1)\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$ .

#### 3.

a) Tính  $(\sqrt[3]{2}+1)^3 + (\sqrt[3]{2}-1)^3$  ;

b) Tính giá trị của biểu thức  $A = x^3y - xy^3$  với

$$x = \frac{6}{2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}} ; \quad y = \frac{2}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}}.$$

4. Cho  $P = \frac{2\sqrt{x} + |\sqrt{x}-1|}{3x + 2\sqrt{x}-1}$ .

Rút gọn P rồi tính giá trị của P với  $x = \frac{4}{9}$  ;  $x = \frac{9}{4}$ .

5. Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{4x}{4-x} \right) : \frac{x+5\sqrt{x}+6}{x-4}$ .

a) Rút gọn P ;

b) Tính giá trị của P khi  $x = \sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}$  ;

c) Tìm x để  $P = 2$ .

6. Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}-1}{x-4} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+4} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}{6\sqrt{x}-18}$ .

a) Rút gọn P ;

b) Tìm các giá trị của  $x$  để  $P > 0$  ;

c) Tìm các giá trị của  $x$  để  $P < 1$ .

7. Cho biểu thức  $P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ .

a) Rút gọn  $P$  ;

b) Tìm  $x$  để  $|P| = \frac{2}{3}$  ;

c) Chứng minh rằng với những giá trị của  $x$  làm cho  $P$  được xác định thì  $P < 1$ .

8. Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{x-\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-2} \right)$ .

a) Rút gọn  $P$  ;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$  ;

c) Tìm  $x$  để  $P \cdot \frac{x-1}{x^2+8x} < -2$ .

## Chuyên đề 2

### GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

### VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

#### A. Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng  $ax + by = c$  trong đó  $x, y$  là ẩn ;  $a, b, c$  là các số cho trước,  $a$  và  $b$  không đồng thời bằng 0.

2. Phương trình bậc nhất hai ẩn  $ax + by = c$  luôn luôn có vô số nghiệm  $(x ; y)$ . Công thức nghiệm tổng quát là :

$$\begin{cases} x = t \in \mathbb{R} \\ y = \frac{c - at}{b} \end{cases} \text{ với } b \neq 0 \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = \frac{c - bt}{a} \\ y = t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

**Chú ý :** Phương trình  $ax + by = c$  có nghiệm nguyên khi và chỉ khi  $c$  chia hết cho ƯCLN( $a, b$ ).

3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng :

$$(I) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

trong đó  $a$  và  $b$  cũng như  $a'$  và  $b'$  không đồng thời bằng 0.

Với  $a'b'c' = 0$  ta dễ dàng đưa được về các trường hợp đặc biệt đã biết.

Với  $a'b'c' \neq 0$  thì:

- Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ .
- Hệ (I) vô nghiệm khi  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ .
- Hệ (I) có vô số nghiệm khi  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ .

4. Các phương pháp giải hệ phương trình :

a) Phương pháp thế

- Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho thành một hệ mới trong đó có phương trình một ẩn.
- Giải phương trình một ẩn này rồi suy ra nghiệm của hệ.

b) Phương pháp cộng đại số

- Nhân hai vế của mỗi phương trình với một thừa số phụ sao cho giá trị tuyệt đối của hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau.
- Dùng quy tắc cộng đại số để được một hệ mới trong đó có một phương trình một ẩn.
- Giải phương trình một ẩn này rồi suy ra nghiệm của hệ.

## B. Một số ví dụ

Ví dụ 7. Cho phương trình  $3x - 2y = 6$ . (1)

- Viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1) ;
- Tìm nghiệm nguyên của phương trình (1).

**Giải**

a) Xét  $3x - 2y = 6$ . (1)

$$\text{Suy ra } y = \frac{3x - 6}{2}.$$

Cho  $x$  một giá trị  $t$  tùy ý ta tính được giá trị tương ứng của  $y$ .

Ta được công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1) là :

$$\begin{cases} x = t \in \mathbb{R}. \\ y = \frac{3t - 6}{2}. \end{cases}$$

$$\text{b) Ta có } y = \frac{3x - 6}{2} = \frac{2x + x - 6}{2} = x + \frac{x - 6}{2}$$

$$\text{Đặt } \frac{x - 6}{2} = t \quad (t \in \mathbb{Z}) \text{ suy ra } x = 2t + 6.$$

Khi đó nghiệm nguyên của phương trình (1) là :

$$\begin{cases} x = 2t + 6 \\ y = 2t + 6 + t \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = 2t + 6 \\ y = 3t + 6 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

Cho  $t$  một giá trị nguyên nào đó ta được một nghiệm nguyên của phương trình (1).

$$\text{Chẳng hạn, với } t = 1 \text{ thì } \begin{cases} x = 8 \\ y = 9 \end{cases}$$

$$\text{với } t = 2 \text{ thì } \begin{cases} x = 10 \\ y = 12. \end{cases}$$

**Ví dụ 8.** Tìm nghiệm nguyên  $(x ; y)$  của phương trình  $(x - 3)y^2 = x^2$ . (2)

**Giải**

- Với  $x = 3$  thì (2) trở thành  $0 \cdot y^2 = 9$ , vô nghiệm.
- Với  $x \neq 3$  thì

$$y^2 = \frac{x^2}{x - 3} = \frac{x^2 - 9 + 9}{x - 3} = x + 3 + \frac{9}{x - 3}.$$

$$\text{Do } x, y \in \mathbb{Z} \text{ nên } \frac{9}{x - 3} \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Do đó } x - 3 \in U(9) = \{\pm 1 ; \pm 3 ; \pm 9\}.$$

Ta có :

$x - 3$	1	-1	3	-3	9	-9
$x$	4	2	6	0	12	-6
$y^2$	16	-4	12	0	16	-4
$y$	$\pm 4$			0	$\pm 4$	

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình (2) là

$$(0; 0); (4; 4); (4; -4); (12; 4); (12; -4).$$

**Nhận xét:** Phương pháp giải trong ví dụ trên gọi là phương pháp *tách ra các giá trị nguyên*.

$$\frac{x^2}{x-3} \text{ được tách thành } x + 3 + \frac{9}{x-3}.$$

Vì  $x + 3$  có giá trị nguyên nên  $\frac{9}{x-3}$  phải có giá trị nguyên, từ đó tìm được  $x$  và suy ra giá trị của  $y$ .

**Ví dụ 9.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 5y = 19 & (1) \\ 3x + 2y = 6 & (2) \end{cases}$$

**Giải.**

**Cách thứ nhất:** (Giải bằng phương pháp thế)

- Rút  $x$  từ phương trình (1):  $x = 19 + 5y$  (3)
- Thế  $x = 19 + 5y$  vào phương trình (2):  
 $3(19 + 5y) + 2y = 6$   
 $\Leftrightarrow 57 + 15y + 2y = 6$   
 $\Leftrightarrow 17y = -51 \Leftrightarrow y = -3.$
- Thay  $y = -3$  vào phương trình (3) được  $x = 19 - 15, x = 4.$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x = 4 \\ y = -3. \end{cases}$$

**Cách thứ hai:** (Giải bằng phương pháp cộng)

$$\begin{cases} x - 5y = 19 & (1) \\ 3x + 2y = 6 & (2) \end{cases} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \text{ (cột bên phải là thừa số phụ)}$$

$$\begin{cases} 3x - 15y = 57 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

$-17y = 51$  (trừ từng vế của hai phương trình)

$$y = -3.$$

Thay  $y = -3$  vào (1) được  $x - 5 \cdot (-3) = 19 \Leftrightarrow x = 4$ .

$$\text{Vậy } \begin{cases} x = 4 \\ y = -3. \end{cases}$$

**Ví dụ 10.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{10}{x-y} = 1 \\ \frac{5}{x+y} + \frac{6}{x-y} = -1 \end{cases}$$

**Giải.** ĐK :  $x \neq \pm y$ .

$$\text{Ta đặt (I) } \begin{cases} \frac{1}{x+y} = a \quad (1) \\ \frac{1}{x-y} = b \quad (2) \end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 3a + 10b = 1 \quad (1) \\ 5a + 6b = -1 \quad (2) \end{cases} \begin{matrix} |5| \\ |3| \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 15a + 50b = 5 \\ 15a + 18b = -3 \end{cases}$$

$$32b = 8$$

$$b = \frac{1}{4}.$$

Thay  $b = \frac{1}{4}$  vào phương trình (1) ta được  $3a + \frac{5}{2} = 1$ ,  $3a = \frac{-3}{2}$ ,  $a = -\frac{1}{2}$ .



$$\text{Vậy } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Thay kết quả này vào hệ (I) ta được

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -2 \\ x-y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

**Ví dụ 11.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} (m-1)x - y = 2 & (1) \\ mx + y = m & (2) \end{cases}$

- Tìm các giá trị của  $m$  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y)$ .
- Xác định  $m$  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện  $x + y < 0$ .

**Giải**

a) • Nếu  $m = 0$  thì hệ đã cho trở thành  $\begin{cases} -x - y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Hệ này có nghiệm duy nhất  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy  $m = 0$  là một giá trị cần tìm.

• Nếu  $m \neq 0$  thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi

$$\frac{m-1}{m} \neq \frac{-1}{1} \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$$

b) +  $\begin{cases} (m-1)x - y = 2 & (1) \\ mx + y = m & (2) \end{cases}$

$$(2m-1)x = m+2$$

Nếu  $m \neq \frac{1}{2}$  thì  $x = \frac{m+2}{2m-1}$ .

Thay  $x = \frac{m+2}{2m-1}$  vào phương trình (2) ta được

$$y = m - mx = m(1 - x) = m \left( 1 - \frac{m + 2}{2m - 1} \right)$$

$$y = \frac{m^2 - 3m}{2m - 1}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x = \frac{m + 2}{2m - 1} \\ y = \frac{m^2 - 3m}{2m - 1}. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } x + y < 0 \Leftrightarrow \frac{m + 2}{2m - 1} + \frac{m^2 - 3m}{2m - 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 2m + 2}{2m - 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow 2m - 1 < 0 \text{ (vì } m^2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{1}{2}.$$

**Ví dụ 12.** Giải hệ phương trình ba ẩn số :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 11 & (1) \\ 2x - y - z = 7 & (2) \\ x + y = 6 & (3) \end{cases}$$

**Giải.** Rút x từ phương trình (3) :  $x = 6 - y$ . (4)

Thế biểu thức của x vào phương trình (1) và (2) được

$$\begin{cases} 6 - y + 2y - 3z = 11 \\ 2(6 - y) - y - z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3z = 5 \\ 3y + z = 5. \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} y - 3z = 5 & (1') \\ 9y + 3z = 15 & (2') \end{cases}$$

---


$$10y = 20$$

$$y = 2$$

Thay  $y = 2$  vào phương trình (1') được  $2 - 3z = 5 \Rightarrow z = -1$ .

Thay  $y = 2$  vào phương trình (4) được  $x = 6 - 2 \Rightarrow x = 4$ .

$$\text{Do đó } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \text{ hay } (x; y; z) = (4; 2; -1).$$

**Nhận xét :** Nói chung, để giải hệ phương trình nhiều ẩn ta có thể dùng phương pháp thế. Tùy theo đặc điểm của từng hệ phương trình ta cũng có thể dùng phương pháp cộng.

### C. Bài tập

9. Cho phương trình  $2x - 5y = 3$ . (1)

a) Viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1);

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình (1).

10. Tìm  $x$  và  $y$  biết :  $|2x + 7y - 17| + (5x - 3y + 19)^2 = 0$ .

11. Cho phương trình  $x^2 + (2a - 5)x - 3b = 0$ . (1)

Hãy xác định các hệ số  $a$  và  $b$  sao cho phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -3$ .

12. Giải hệ phương trình : 
$$\begin{cases} \frac{27}{x+y} + \frac{21}{x-y} = 2 \\ \frac{81}{x+y} - \frac{105}{x-y} = -2 \end{cases}$$

13. Giải hệ phương trình : 
$$\begin{cases} 3x - |y - 2| = 3 \\ 6x + 5y = 7 \end{cases}$$

14. Cho hệ phương trình : 
$$\begin{cases} 3x + my = 10 \\ x - y = 5 \end{cases} \quad (\text{m là tham số}).$$

a) Tìm  $m$  để hệ phương trình có nghiệm  $(x; y)$  trong đó  $x = 4$ ;

b) Tìm  $m$  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y)$  thỏa mãn  $5x + 2y = 32$ .

15. Giải hệ phương trình : 
$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{5}{6} \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{4}{3} \\ \frac{z+x}{zx} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

## Chuyên đề 3

# PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

### A. Kiến thức cơ bản

1. Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

trong đó x là ẩn ; a, b, c là những số cho trước và  $a \neq 0$ .

2. Công thức nghiệm

<i>Công thức nghiệm tổng quát</i>	<i>Công thức nghiệm thu gọn</i>
Bước 1 : Tính $\Delta = b^2 - 4ac$ Bước 2 : Xét dấu của $\Delta$ • Nếu $\Delta < 0$ thì (1) vô nghiệm • Nếu $\Delta = 0$ thì (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ • Nếu $\Delta > 0$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	Bước 1 : Tính $\Delta' = b'^2 - ac$ ( $b = 2b'$ ) Bước 2 : Xét dấu của $\Delta'$ • Nếu $\Delta' < 0$ thì (1) vô nghiệm. • Nếu $\Delta' = 0$ thì (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$ • Nếu $\Delta' > 0$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$

3. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

• Nếu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) thì :

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

• Đảo lại, nếu có hai số  $x_1, x_2$  mà

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 = P \\ S^2 - 4P \geq 0 \end{cases}$$

thì  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình  $x^2 - Sx + P = 0$ .

### Áp dụng :

• Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

\* Nếu  $a + b + c = 0$  thì phương trình có nghiệm  $x_1 = 1$  ;  $x_2 = \frac{c}{a}$ .

\* Nếu  $a - b + c = 0$  thì phương trình có nghiệm  $x_1 = -1$  ;  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

• Tính giá trị của biểu thức đối xứng của các nghiệm và xét dấu các nghiệm mà không cần giải phương trình (nếu phương trình có nghiệm) :

$$* x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a}.$$

$$* \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{b}{a} ; \frac{c}{a} = -\frac{b}{c}.$$

\* Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu  $\Leftrightarrow ac < 0$ .

\* Phương trình (1) có hai nghiệm dương  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0. \end{cases}$

\* Phương trình (1) có hai nghiệm âm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0. \end{cases}$

#### 4. Giải phương trình quy về phương trình bậc hai

*Cách 1* : Đưa về phương trình tích.

*Cách 2* : Đặt ẩn phụ.

#### 5. Giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Ta có thể khử dấu giá trị tuyệt đối bằng hai cách :

*Cách 1* : Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối

$$|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

*Cách 2* : Bình phương hai vế của phương trình.

## B. Một số ví dụ

Ví dụ 13. Cho phương trình

$$2x^2 - (m + 1)x - (m + 3) = 0. \quad (1)$$

- Giải phương trình khi  $m = 4$ ;
- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ ;
- Xác định giá trị của  $m$  để (1) có hai nghiệm trái dấu.

**Giải**

a) Khi  $m = 4$  ta được phương trình  $2x^2 - 5x - 7 = 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 56 = 81; \quad \sqrt{\Delta} = 9.$$

$$\text{Do đó } x_1 = \frac{5 + 9}{4} = 3,5; \quad x_2 = \frac{5 - 9}{4} = -1.$$

Cách khác : Ta có  $a - b + c = 2 + 5 - 7 = 0$

$$\text{nên } x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

b) Xét biệt thức của phương trình :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = [-(m + 1)]^2 + 8(m + 3) \\ &= m^2 + 10m + 25 = (m + 5)^2 \geq 0 \text{ với mọi giá trị của } m. \end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .

c) Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow -2(m + 3) < 0 \Leftrightarrow m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -3.$$

Ví dụ 14. Cho phương trình

$$x^2 - 2(m + 2)x + 4m = 0. \quad (1)$$

- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi giá trị của  $m$ ;
- Tính theo tham số  $m$  giá trị của biểu thức

$$A = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2};$$

c) Tìm một hệ thức liên hệ giữa  $x_1$  và  $x_2$  không phụ thuộc vào  $m$ .

**Giải**

a) Xét biệt thức  $\Delta'$  của phương trình :

$$\begin{aligned}\Delta' &= b'^2 - ac = [-(m+2)]^2 - 4m \\ &= m^2 + 4 > 0 \text{ với mọi giá trị của } m.\end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$ .

b) Theo hệ thức Vi-ét ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2(m+2) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 4m \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Do đó } x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \\ &= 4(m+2)^2 - 8m = 4m^2 + 8m + 16.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 x_2)^2} \\ &= \frac{4m^2 + 8m + 16}{16m^2} = \frac{m^2 + 2m + 4}{4m^2}.\end{aligned}$$

$$\text{c) Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) \\ x_1 x_2 = 4m \end{cases}$$

Suy ra  $2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 4m + 8 - 4m = 8$  (không phụ thuộc  $m$ ).

**Nhận xét :** Để viết được một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc  $m$  ta làm theo hai bước :

Bước 1 : Theo hệ thức Vi-ét viết các hệ thức của S và P theo  $m$ .

Bước 2 : Dùng quy tắc cộng hoặc thế để khử  $m$ .

**Ví dụ 15.** Giải các phương trình :

a)  $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$  ;

b)  $3x - 2\sqrt{6x} + 2 = 0$ .

**Giải.** a)  $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$ .

Đặt  $x^2 = t \geq 0$  ta được phương trình  $4t^2 - 3t - 1 = 0$ .

Vì  $a + b + c = 0$  nên  $t_1 = 1$  ;  $t_2 = \frac{-1}{4}$  (loại).

Do đó  $x^2 = 1$ , suy ra  $x = \pm 1$ .

b)  $3x - 2\sqrt{6x} + 2 = 0$ . Điều kiện  $x \geq 0$ .

Đặt  $\sqrt{x} = t \geq 0$  suy ra  $x = t^2$ .

Ta được phương trình :  $3t^2 - 2\sqrt{6}t + 2 = 0$

$$\Delta' = (\sqrt{6})^2 - 6 = 0.$$

Do đó  $t_{1,2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$  suy ra  $x = t^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$  (thỏa mãn điều kiện).

**Ví dụ 16.** Giải phương trình

$$|x^2 - x + 1| - |x - 2| = 6. \quad (1)$$

*Giải.* Ta có  $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$  nên  $|x^2 - x + 1| = x^2 - x + 1$ .

Khi đó phương trình (1) trở thành :

$$x^2 - x + 1 - |x - 2| = 6. \quad (2)$$

• Nếu  $x \geq 2$  thì  $x - 2 \geq 0$ ,  $|x - 2| = x - 2$ .

Phương trình (2) trở thành :

$$x^2 - x + 1 - (x - 2) = 6 \text{ hay } x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Vì  $a - b + c = 0$  nên  $x_1 = -1$  (không thuộc khoảng đang xét)

$$x_2 = 3 \text{ (thuộc khoảng đang xét).}$$

• Nếu  $x < 2$  thì  $x - 2 < 0$ ,  $|x - 2| = 2 - x$ .

Phương trình (2) trở thành :

$$x^2 - x + 1 - (2 - x) = 6 \text{ hay } x^2 = 7.$$

Suy ra  $x_1 = \sqrt{7} > 2$  (không thuộc khoảng đang xét)

$$x_2 = -\sqrt{7} < 2 \text{ (thuộc khoảng đang xét).}$$

Vậy tập hợp nghiệm của phương trình (1) là  $S = \{3; -\sqrt{7}\}$ .

**Ví dụ 17.** Cho phương trình

$$x^2 + 6x + m = 0. \quad (1)$$

Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của  $m$  để (1) có hai nghiệm đều âm.

*Giải.* Phương trình (1) có hai nghiệm âm



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m \geq 0 \\ m > 0 \\ -6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 9.$$

Vì  $m$  phải là số nguyên nhỏ nhất nên  $m = 1$ .

**Ví dụ 18.** Cho phương trình  $x^2 - 6x + m = 0$ . (1)

Tìm giá trị của  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn điều kiện :

a)  $4x_1 - 5x_2 = 42$  ;

b)  $x_1^2 + x_2^2 = 20$ .

**Giải.** Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là :

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 9.$$

a) Theo hệ thức Vi-ét ta có  $x_1 + x_2 = 6$ .

Kết hợp với điều kiện  $4x_1 - 5x_2 = 23$  ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 4x_1 - 5x_2 = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -2. \end{cases}$$

Vì  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m$  nên  $m = 8 \cdot (-2) = -16$  (thỏa mãn điều kiện).

b) Ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1^2 + x_2^2 = 20 \end{cases}$$

Vì  $x_1^2 + x_2^2 = 20$  nên  $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 20 \Rightarrow 36 - 2m = 20$

$\Rightarrow m = 8$  (thỏa mãn điều kiện).

**Ví dụ 19.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 5 & (1) \\ xy = 24 & (2) \end{cases}$$

**Giải.** Rút  $x$  từ phương trình (1) :  $x = 5 + y$ . (3)

Thế  $x = 5 + y$  vào phương trình (2) ta được

$$(5 + y) \cdot y = 24 \Leftrightarrow y^2 + 5y - 24 = 0.$$

Giải phương trình này ta được  $y_1 = 3$  ;  $y_2 = -8$ .

Với  $y_1 = 3$  thì  $x_1 = 3 + 5 = 8$

Với  $y_2 = -8$  thì  $x_2 = -8 + 5 = -3$ .

Do đó hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là :  $(8 ; 3) ; (-3 ; -8)$ .

### C. Bài tập

16. Giải các phương trình :

a)  $(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 2) = 40$  ;

b)  $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$ .

17. Cho phương trình :  $x^2 + (m - 5)x - 3(m - 2) = 0$ . (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm  $x_1 = 3$  với mọi giá trị của  $m$  ;

b) Tìm  $m$  để phương trình (1) có nghiệm kép ;

c) Tìm  $m$  để phương trình (1) có nghiệm  $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ .

18. Không giải phương trình, hãy tính tổng các bình phương và hiệu các bình phương các nghiệm của phương trình :

a)  $x^2 + 5x + 6 = 0$  ;

b)  $7x^2 - x + 2 = 0$ .

19. Không giải phương trình, xét dấu các nghiệm của các phương trình sau :

a)  $(1 + \sqrt{2})x^2 + 7x + 1 - \sqrt{2} = 0$  ;

b)  $5x^2 + 8x + 1 = 0$  ;

c)  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ .

20. Cho phương trình  $(m + 4)x^2 - 2(m - 3)x - 2 = 0$ . (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi  $m$  ;

b) Tìm  $m$  để phương trình có một nghiệm là 1.

Khi đó tìm nghiệm thứ hai của phương trình.

21. Cho phương trình  $x^2 + 2(m + 1)x + 2m = 0$ . (1)

a) Chứng tỏ rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi giá trị của  $m$  ;



*Bước 2.* Giải phương trình (hoặc hệ phương trình).

*Bước 3.* Trả lời : Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không thỏa mãn, rồi kết luận.

Khó khăn mà học sinh thường gặp là không biết biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và theo các đại lượng đã biết khác, tức là không thiết lập được mối quan hệ giữa các đại lượng. Tùy theo từng dạng bài tập mà ta xác định được các đại lượng có trong bài, các công thức biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng ấy.

## B. Một số ví dụ

**Ví dụ 20.** Lúc 6 giờ một ô tô chạy từ A về B. Sau đó nửa giờ, một xe máy chạy từ B về A. Ô tô gặp xe máy lúc 8 giờ. Biết vận tốc ô tô hơn vận tốc xe máy là 10 km/h và khoảng cách  $AB = 195$  km. Tính vận tốc mỗi xe.

*Nhận xét :* Bài toán này là một bài toán về chuyển động.

1. Toán chuyển động có ba đại lượng :

$$\text{Quãng đường} = \text{Vận tốc} \times \text{Thời gian}$$

$$\text{Vận tốc} = \text{Quãng đường} : \text{Thời gian}$$

$$\text{Thời gian} = \text{Quãng đường} : \text{Vận tốc}.$$

2. Các đơn vị của ba đại lượng phải phù hợp với nhau. Nếu quãng đường tính bằng ki-lô-mét, vận tốc tính bằng ki-lô-mét/giờ thì thời gian phải tính bằng giờ.

*Giải.* Gọi vận tốc ô tô là  $x$  (km/h) ( $x > 0$ ).

Gọi vận tốc xe máy là  $y$  (km/h) ( $y > 0$ ).

Vì vận tốc ô tô hơn vận tốc xe máy là 10 km/h nên ta có phương trình :

$$x - y = 10.$$

Thời gian ô tô đã đi cho đến lúc gặp xe máy là :  $8 - 6 = 2$  (giờ).

Thời gian xe máy đã đi cho đến lúc gặp ô tô là :  $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$  (giờ).

Quãng đường ô tô chạy trong 2 giờ là  $2x$  (km).

Quãng đường xe máy chạy trong  $\frac{3}{2}$  giờ là  $\frac{3y}{2}$  (km).

Vì quãng đường  $AB$  dài 195 km nên ta có phương trình

$$2x + \frac{3}{2}y = 195 \text{ hay } 4x + 3y = 390.$$

Do đó ta có hệ hai phương trình : 
$$\begin{cases} x - y = 10 \\ 4x + 3y = 390. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được  $x = 60$  ;  $y = 50$  (thỏa mãn điều kiện).

Vậy vận tốc ô tô là 60 km/h, vận tốc xe máy là 50 km/h.

**Lưu ý :**

– Trong toán chuyển động ngược chiều thì tổng quãng đường hai xe đã đi đúng bằng khoảng cách ban đầu giữa hai xe.

– Có thể chỉ chọn một ẩn số để giải bài toán trên.

**Ví dụ 21.** Một tàu thủy chạy xuôi dòng sông 66 km hết một thời gian bằng thời gian tàu chạy ngược dòng 54 km. Nếu tàu chạy xuôi dòng 22 km và ngược dòng 9 m thì chỉ hết 1 giờ. Tính vận tốc riêng của tàu thủy và vận tốc dòng nước (biết vận tốc riêng của tàu không đổi).

**Nhận xét :** Bài toán này là *bài toán chuyển động trong dòng chảy*. Cần nhớ :

– Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước

– Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng – vận tốc dòng nước.

**Giải.** Gọi vận tốc riêng của tàu thủy là  $x$  (km/h).

Gọi vận tốc của dòng nước là  $y$  (km/h) ( $x > y > 0$ ).

Suy ra vận tốc của tàu thủy khi xuôi dòng là  $x + y$  (km/h).

Vận tốc của tàu thủy khi ngược dòng là  $x - y$  (km/h).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{66}{x + y} = \frac{54}{x - y} \\ \frac{22}{x + y} + \frac{9}{x - y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 3. \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy vận tốc riêng của tàu thủy là 30 km/h.

Vận tốc của dòng nước là 3 km/h.

**Ví dụ 22.** Một tổ công nhân theo kế hoạch phải sản xuất được 280 sản phẩm với năng suất định trước. Do mỗi ngày tổ đó đã sản xuất vượt mức 10 sản phẩm nên tổ đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định là 1 ngày và còn sản xuất thêm được 20 sản phẩm. Tính năng suất định trước.

**Nhận xét :** Bài toán này là một *bài toán về năng suất*. Loại toán này có ba đại lượng :

1. Khối lượng công việc = Năng suất  $\times$  Thời gian.
2. Năng suất = Khối lượng công việc : Thời gian.
3. Thời gian = Khối lượng công việc : Năng suất.

**Giải.** Gọi năng suất định trước là  $x$  (sản phẩm/ngày) ( $x$  : nguyên dương)

Suy ra năng suất thực tế là  $x + 10$  (sản phẩm/ngày).

Thời gian dự định làm là  $\frac{280}{x}$  (ngày).

Thời gian thực tế đã làm là

$$\frac{300}{x + 10} \text{ (ngày)}.$$

Theo đề bài, tổ đã hoàn thành kế hoạch sớm được một ngày nên ta có phương trình

$$\frac{280}{x} - \frac{300}{x + 10} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 30x - 2800 = 0, \text{ có nghiệm } x_1 = 40 \text{ (thỏa mãn ĐK)},$$

$$x_2 = -70 \text{ (loại)}.$$

Vậy năng suất định trước là 40 sản phẩm/ngày.

**Ví dụ 23.** Hai vòi cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 4 giờ 48 phút sẽ đầy. Biết rằng thời gian vòi I chảy một mình đầy bể ít hơn thời gian vòi II chảy một mình đầy bể là 4 giờ. Hỏi mỗi vòi nếu chảy một mình thì phải mất bao lâu mới đầy bể ?

**Nhận xét :** Bài toán này là một bài toán về công việc đồng thời. Để giải loại toán này, ta thường coi toàn bộ công việc là 1 đơn vị.

$$\text{Suy ra năng suất} = \frac{1}{\text{Thời gian}}.$$

Lập phương trình theo mẫu :

$$\text{Tổng các năng suất riêng} = \text{Năng suất chung}.$$

$$\text{Giải. } 4 \text{ giờ } 48 \text{ phút} = 4\frac{4}{5} \text{ giờ} = \frac{24}{5} \text{ giờ}.$$

Gọi thời gian để vòi I chảy một mình đầy bể là  $x$  giờ  $\left(x > \frac{24}{5}\right)$ .

Suy ra thời gian để vòi II chảy một mình đầy bể là  $x + 4$  (giờ).

Trong 1 giờ vòi I chảy được  $\frac{1}{x}$  (bể).

Trong 1 giờ vòi II chảy được  $\frac{1}{x+4}$  (bể).

Trong 1 giờ cả hai vòi chảy được  $1 : \frac{24}{5} = \frac{5}{24}$  (bể).

Do đó ta có phương trình :  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow 5x^2 - 28x - 96 = 0$ .

Phương trình có nghiệm  $x_1 = 8$  (thỏa mãn ĐK) ;  $x_2 = \frac{-12}{5}$  (loại).

Vậy: Vòi I chảy một mình đầy bể trong 8 giờ.

Vòi II chảy một mình đầy bể trong 12 giờ.

**Ví dụ 24.** Tìm một số tự nhiên có hai chữ số biết rằng tổng các chữ số của nó bằng  $\frac{1}{4}$  số đó. Nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được một số mới hơn số đã cho là 18.

*Nhận xét :* Bài toán này là một bài toán về số và chữ số. Trong hệ thập phân thì số có hai chữ số  $\overline{xy}$  được biểu diễn thành tổng  $10x + y$ , trong đó  $x \in \mathbb{N}$  ;

$0 < x \leq 9$  và  $y \in \mathbb{N}$  ;  $0 \leq y \leq 9$ .

Số viết theo thứ tự ngược lại là  $\overline{yx} = 10y + x$ .

**Giải.** Gọi chữ số hàng chục của số phải tìm là  $x$  ( $x \in \mathbb{N}$  ;  $0 < x \leq 9$ ).

Gọi chữ số hàng đơn vị của số phải tìm là  $y$  ( $y \in \mathbb{N}$  ;  $0 \leq y \leq 9$ ).

Số phải tìm là  $10x + y$ .

Ta có phương trình :  $x + y = \frac{1}{4} \cdot (10x + y)$  hay  $6x - 3y = 0$ .

Theo đề bài số viết theo thứ tự ngược lại hơn số đã cho là 18 nên ta có phương trình :

$$(10y + x) - (10x + y) = 18 \text{ hay } -x + y = 2.$$

Do đó ta có hệ phương trình :  $\begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$  (thỏa mãn ĐK).

Vậy số phải tìm là 24.

**Ví dụ 25.** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 180 m. Nếu giảm chiều dài đi 20% và tăng chiều rộng thêm 20 m thì diện tích mới bằng  $\frac{6}{5}$  diện tích cũ. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

**Nhận xét :** Bài toán này là một bài toán về so sánh, tăng giảm, hơn kém một số đơn vị, một số lần.

– Nếu A hơn B là k đơn vị thì  $A - B = k$  hoặc  $A = B + k$ .

– Nếu A hơn B là k lần thì  $A = kB$ .

– Nếu số A bằng  $\frac{3}{4}$  số B thì  $A = \frac{3}{4}B$ .

**Giải.** Gọi chiều dài của khu vườn là x mét ( $x > 0$ ).

Gọi chiều rộng của khu vườn là y mét ( $y > 0$ ).

Theo đề bài, chu vi của vườn là 180 m nên ta có phương trình :

$$(x + y).2 = 180 \text{ hay } x + y = 90.$$

Nếu giảm chiều dài đi 20% của nó thì chiều dài còn lại là  $\frac{80}{100}x$  (m).

Nếu tăng chiều rộng thêm 20 m thì chiều rộng là  $y + 20$  (m).

Diện tích khu vườn mới là  $\frac{80}{100}x.(y + 20)$  ( $m^2$ ).

Theo đề bài, diện tích mới bằng  $\frac{6}{5}$  diện tích cũ nên ta có phương trình :

$$\frac{80}{100}x.(y + 20) = \frac{6}{5}xy \text{ hay } 40x - xy = 0.$$

Do đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 90 & (1) \\ 40x - xy = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40. \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy chiều dài khu vườn là 50 m, chiều rộng khu vườn là 40 m.



## C. Bài tập

### • Toán chuyển động

26. Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc AM và một đoạn xuống dốc MB. Một người đi xe đạp từ A đến B mất 2 giờ ; đi từ B về A hết 3 giờ. Biết vận tốc lên dốc (lúc đi cũng như lúc về) là 9 km/h, vận tốc xuống dốc (lúc đi cũng như lúc về) là 18 km/h. Tính độ dài các quãng đường AM, MB.
27. Quãng đường AB dài 20 km. Lúc 7 giờ sáng một xe ô tô khởi hành từ A. Trước đó 30 phút một xe máy khởi hành từ B cùng đi về C (B nằm giữa A và C). Ô tô đuổi kịp xe máy lúc 11 giờ. Biết vận tốc ô tô hơn vận tốc xe máy là 10 km/h. Tính vận tốc mỗi xe.
28. Một ca nô chạy xuôi dòng và ngược dòng trên sông với vận tốc riêng không đổi. Nếu ca nô chạy xuôi dòng trong 1 giờ rồi ngược dòng trong 2 giờ thì được tổng cộng 126 km. Nếu ca nô xuôi dòng trong một giờ rồi và ngược dòng trong một giờ rồi thì được tất cả 129 km. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.
29. Hai ô tô cùng khởi hành từ A để đi về B cách nhau 150 km. Vận tốc xe I hơn vận tốc xe II là 5 km/h nên đến B trước xe II là 20 phút. Tính thời gian mỗi xe đã đi.

### • Toán năng suất

30. Theo kế hoạch một tổ phải sản xuất 180 tấn hàng trong một thời gian. Do mỗi ngày tổ đó đã sản xuất vượt mức 8 tấn nên tổ đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 1 ngày và còn sản xuất vượt mức 10 tấn hàng nữa. Tính năng suất dự kiến.
31. Theo kế hoạch, trong cùng một thời gian định trước, hai tổ công nhân phải sản xuất cùng một số sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ I tăng thêm 4 sản phẩm nên chẳng những hoàn thành kế hoạch sớm được 3 ngày mà còn vượt mức 58 sản phẩm. Mỗi ngày tổ II tăng thêm 3 sản phẩm nên chẳng những hoàn thành kế hoạch sớm được 2 ngày mà còn vượt mức 54 sản phẩm. Hỏi kế hoạch, mỗi tổ công nhân phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm ?

### • Toán về công việc đồng thời

32. Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 4 giờ sẽ xong. Nhưng hai đội mới làm chung được 3 giờ thì đội I nghỉ, đội II tiếp tục làm thêm trong 3 giờ nữa mới xong.  
Hỏi mỗi đội nếu làm một mình thì phải bao lâu mới xong công việc ?

33. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn trong 45 phút thì được  $\frac{2}{5}$  bể.

Nếu chảy riêng thì vòi II chảy đầy bể chậm hơn vòi I là 2 giờ.

Hỏi mỗi vòi nếu chảy một mình thì mất bao nhiêu lâu mới đầy bể ?

• *Toán về số và chữ số*

34. Tìm một số có hai chữ số biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 9. Nếu viết thêm chữ số 0 xen vào giữa hai chữ số của nó thì được một số mới gấp 9 lần số ban đầu.

35. Tìm một số có hai chữ số biết rằng tổng của số đó với số viết theo thứ tự ngược lại là 132. Nếu lấy số đó chia cho tích các chữ số của nó thì được thương là 2 và dư 5.

• *Các dạng toán khác*

36. Theo kế hoạch trong một thời gian hai tổ phải sản xuất được 1000 sản phẩm. Nhưng thực tế hai tổ đã sản xuất vượt mức 69 sản phẩm. Tính ra tổ I đạt 108% kế hoạch, tổ II đạt 106% kế hoạch. Hỏi theo kế hoạch, mỗi tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm ?

37. Một lớp học có một số vở để làm phần thưởng cho học sinh tiên tiến. Nếu mỗi học sinh được chia 12 vở thì còn thừa 10 vở. Nếu mỗi học sinh được chia 13 vở thì lại thiếu 10 vở. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu học sinh tiên tiến và bao nhiêu quyển vở để làm phần thưởng ?

38. Một phòng họp có 360 ghế ngồi được sắp xếp thành từng hàng, mỗi hàng có số ghế như nhau. Vì có 418 người đến họp nên chẳng những phải xếp thêm 2 hàng ghế mà mỗi hàng còn phải xếp thêm 1 ghế nữa thì mới đủ chỗ ngồi. Hỏi lúc đầu có bao nhiêu hàng ghế, biết số hàng ghế không quá 25 ?

39. Có hai phân xưởng, phân xưởng I làm trong 10 ngày, phân xưởng II làm trong 12 ngày được tất cả 940 sản phẩm. Biết số sản phẩm phân xưởng I làm trong 4 ngày hơn số sản phẩm phân xưởng II làm trong 3 ngày là 25 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi phân xưởng đã làm.

## Chuyên đề 5

# HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

### A. Kiến thức cần nhớ

#### 1. Định nghĩa

- Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức  $y = ax + b$  trong đó  $a, b$  là các số cho trước và  $a \neq 0$ .  
Đặc biệt, khi  $b = 0$  thì hàm số có dạng  $y = ax$ .
- Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng  $ax + by = c$   
( $a, b, c$  là các số đã biết,  $a \neq 0$  hoặc  $b \neq 0$ ).  
Nếu  $b \neq 0$  thì có thể đưa phương trình về dạng  $y = mx + n$ .
- Hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) là hàm số bậc hai đặc biệt.

#### 2. Tính chất

- Hàm số bậc nhất  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) xác định với mọi giá trị của  $x \in \mathbb{R}$  và :
  - Đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi  $a > 0$  ;
  - Nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  khi  $a < 0$ .
- Hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) xác định với mọi giá trị của  $x \in \mathbb{R}$  và :
  - Nếu  $a > 0$  thì hàm số nghịch biến khi  $x < 0$ , đồng biến khi  $x > 0$ ;
  - Nếu  $a < 0$  thì hàm số đồng biến khi  $x < 0$ , nghịch biến khi  $x > 0$ .

#### 3. Đồ thị

- a) Đồ thị của hàm số  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) là một đường thẳng :
- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $b$ .
  - Song song với đường thẳng  $y = ax$  nếu  $b \neq 0$  và trùng với đường thẳng  $y = ax$  nếu  $b = 0$ .
- Số  $a$  gọi là *hệ số góc*, số  $b$  gọi là *tung độ gốc* của đường thẳng.  
Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi đường thẳng  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) và trục  $Ox$ .  
Nếu  $a > 0$  thì  $\tan \alpha = a$ .  
Nếu  $a < 0$ , ta đặt  $\beta = 180^\circ - \alpha$ . Khi đó  $\tan \beta = |a|$ .  
Tính  $\beta$  rồi suy ra  $\alpha = 180^\circ - \beta$ .

b) Đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) là một parabol đỉnh O và nhận trục Oy làm trục đối xứng.

– Nếu  $a > 0$  thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $y = 0$ .

– Nếu  $a < 0$  thì đồ thị nằm bên dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị. Giá trị lớn nhất của hàm số là  $y = 0$ .

#### 4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng, của đường thẳng và parabol

Cho các đường thẳng (d) :  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ),

(d') :  $y = a'x + b'$  ( $a' \neq 0$ ),

và parabol (P) :  $y = kx^2$  ( $k \neq 0$ ).

Khi đó :

- (d) cắt (d')  $\Leftrightarrow a \neq a'$
- (d) // (d')  $\Leftrightarrow a = a'$  và  $b \neq b'$
- (d) trùng (d')  $\Leftrightarrow a = a'$  và  $b = b'$ .
- (d)  $\perp$  (d')  $\Leftrightarrow a \cdot a' = -1$ .

Xét phương trình  $kx^2 = ax + b$  (1)

- Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì (P) và (d) không giao nhau.
- Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
- Nếu phương trình (1) có nghiệm kép thì (P) và (d) tiếp xúc nhau.

Hoành độ của giao điểm (hoặc tiếp điểm) của (P) và (d) chính là nghiệm của phương trình  $kx^2 = ax + b$ .

#### 5. Bổ sung

a) Cho điểm  $A(x_1 ; y_1)$  và  $B(x_2 ; y_2)$ .

Khi đó  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

b) Khoảng cách h từ gốc tọa độ O đến đường thẳng  $y = ax + b$ .

- Có thể dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính.
- Đặc biệt, nếu đường thẳng được cho bởi phương trình  $ax + by = c$  thì

$$h = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

## B. Một số ví dụ

**Ví dụ 26.** Cho hàm số  $y = m(x + 1)^2 - 2x^2$ . (1)

a) Với giá trị nào của  $m$  thì (1) là hàm số bậc nhất? Khi đó hàm số này đồng biến hay nghịch biến? Vẽ đồ thị của hàm số ứng với giá trị đó của  $m$ .

b) Với giá trị nào của  $m$  thì (1) là hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ )? Vẽ đồ thị của hàm số ứng với giá trị đó của  $m$ .

**Giải**

a) Ta khai triển và viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y = (m - 2)x^2 + 2mx + m. \quad (1')$$

Hàm số (1') là hàm bậc nhất  $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow m = 2.$$

Khi đó (1') trở thành  $y = 4x + 2$  có dạng  $y = ax + b$ .

Hàm số này đồng biến vì  $a = 4 > 0$ .

• Vẽ đồ thị (d) của hàm số  $y = 4x + 2$ .

(Xem hình vẽ)

x	0	$-\frac{1}{2}$
y	2	0

b) Hàm số (1') là hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ )

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 2mx + m = 0 \text{ với mọi } x \end{cases}$$

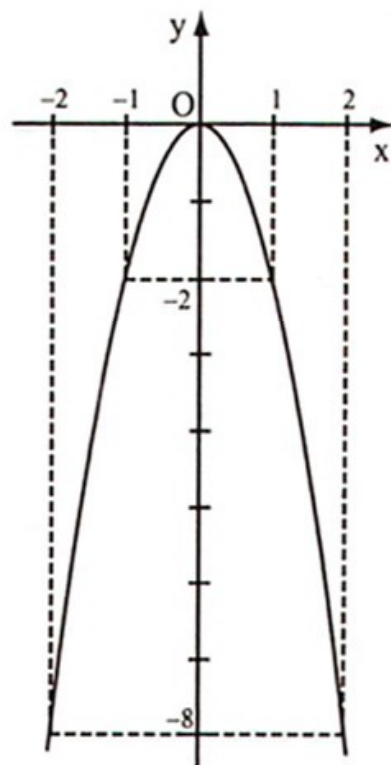
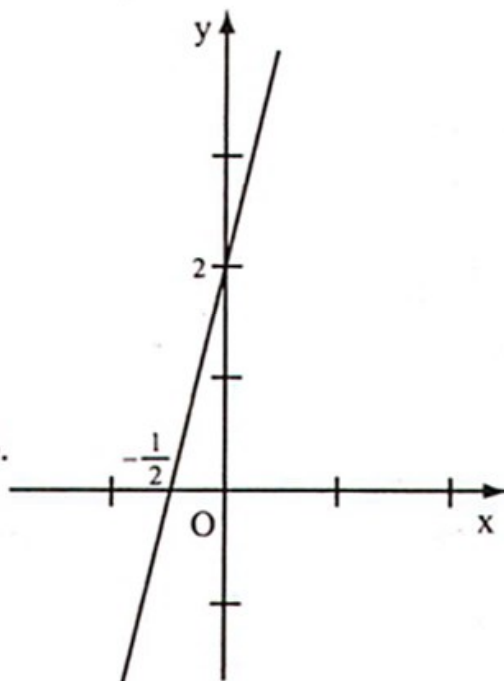
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m(2x + 1) = 0 \text{ với mọi } x \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Khi đó (1') trở thành  $y = -2x^2$ .

• Vẽ đồ thị (P) của hàm số  $y = -2x^2$ .

(Xem hình vẽ)

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8



**Ví dụ 27.** Cho các hàm số :

$$y = 2mx + m + 1 \quad (1)$$

$$y = (m - 1)x + 3 \quad (2)$$

- Xác định  $m$  để hàm số (1) đồng biến, còn hàm số (2) nghịch biến.
- Xác định  $m$  để đồ thị của hai hàm số song song với nhau.
- Chứng minh rằng đồ thị (d) của hàm số (1) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của  $m$ .

**Giải**

- a) Hàm số (1) đồng biến và hàm số (2) nghịch biến

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

- b) Đồ thị của hai hàm số song song với nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = m - 1 \\ m + 1 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

- c) Viết lại hàm số (1) dưới dạng  $y = m(2x + 1) + 1$ .

Ta thấy với mọi giá trị của  $m$ , khi  $x = -\frac{1}{2}$  thì  $y = 1$ .

Vậy đồ thị (d) của hàm số (1) luôn đi qua một điểm cố định là điểm  $M\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ .

**Ví dụ 28.** Xác định hàm số  $y = ax + b$ , biết đồ thị (d) của nó đi qua  $A(2; 1,5)$  và  $B(8; -3)$ . Khi đó hãy tính :

- Góc  $\alpha$  tạo bởi đường thẳng (d) và trục  $Ox$  ;
- Khoảng cách  $h$  từ gốc tọa độ  $O$  đến đường thẳng (d).

**Giải**

Vì (d) đi qua  $A(2; 1,5)$  và  $B(8; -3)$  nên tọa độ của  $A$  và  $B$  phải thỏa mãn phương trình  $y = ax + b$ .

Thay  $x = 2$  ;  $y = 1,5$  rồi lại thay  $x = 8$  ;  $y = -3$  vào phương trình  $y = ax + b$  ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 1,5 = 2a + b \\ -3 = 8a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = 3. \end{cases}$$

Vậy hàm số cần xác định là

$$y = -\frac{3}{4}x + 3.$$

a) Đồ thị của hàm số  $y = -\frac{3}{4}x + 3$

cắt trục tung tại điểm P có tung độ bằng 3 ; cắt trục hoành tại điểm Q có hoành độ là 4.

Xét  $\Delta POQ$  vuông tại O có :

$$\tan \widehat{Q}_1 = \frac{OP}{OQ} = \frac{3}{4} \approx \tan 36^\circ 52'$$

suy ra  $\widehat{Q}_1 \approx 36^\circ 52'$ .

Do đó  $\alpha \approx 180^\circ - 36^\circ 52' = 143^\circ 8'$ .

b) Vẽ  $OH \perp PQ$  ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} \text{ hay } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{25}{144}.$$

Do đó  $h = \sqrt{\frac{144}{25}} = 2,4$ .

**Ví dụ 29.** Cho parabol (P) :  $y = ax^2$  và đường thẳng (d) :  $y = x + 1,5$ .

a) Tìm a biết rằng (P) cắt (d) tại điểm A có hoành độ bằng -1.

b) Tìm tọa độ giao điểm thứ hai B (B khác A) của (P) và (d).

c) Tính độ dài AB.

**Giải**

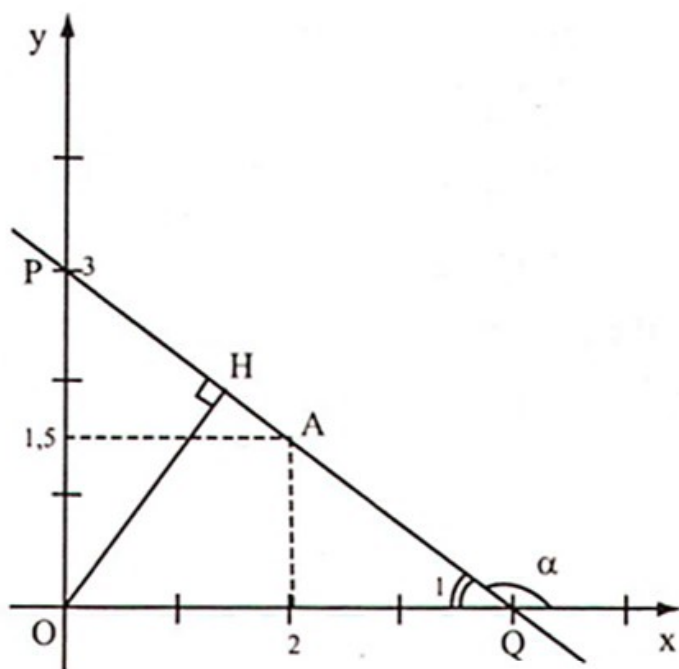
a) Đường thẳng (d) đi qua A có hoành độ bằng -1 nên ta thay  $x = -1$  vào hàm số  $y = x + 1,5$  được  $y = -1 + 1,5 = 0,5$ .

Vậy tọa độ của điểm A là  $(-1 ; 0,5)$ .

Parabol (P) đi qua A nên ta thay  $x = -1 ; y = 0,5$  vào hàm số  $y = ax^2$ , được

$$0,5 = a \cdot (-1)^2, \text{ suy ra } a = \frac{1}{2}.$$

Vậy  $y = \frac{1}{2}x^2$ .



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm  $x_1 = -1$  và  $x_2 = 3$ .

Với  $x_2 = 3$  thì  $y_2 = 3 + 1,5 = 4,5$ .

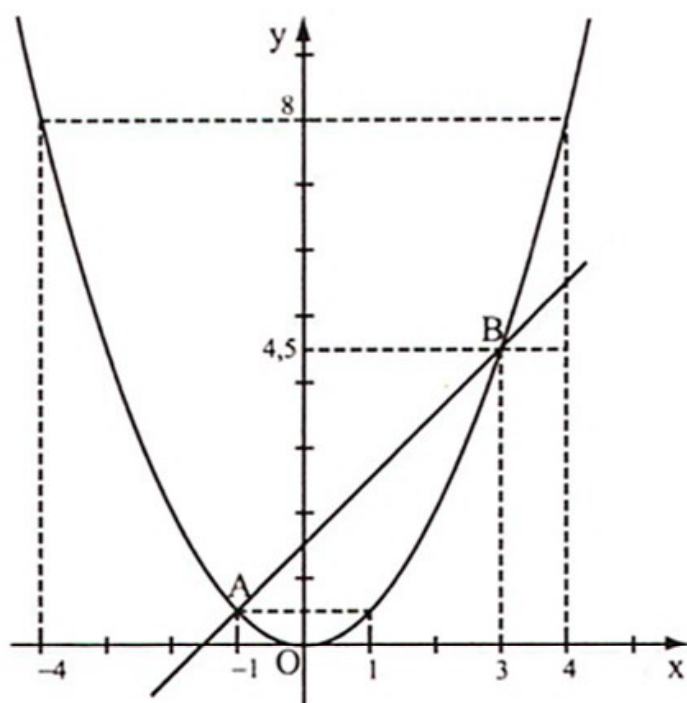
Vậy tọa độ của điểm B là (3 ; 4,5).

c) Ta có :

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$AB^2 = 16 + 16 = 32.$$

$$\text{Do đó } AB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$



### C. Bài tập

40. Cho hàm số  $y = ax + b$ .

a) Xác định các hệ số a và b, biết đồ thị của nó song song với đường thẳng

$$y = \frac{2}{3}x \text{ và đi qua điểm } A(3 ; 4).$$

b) Vẽ đồ thị của hàm số vừa được xác định.

41. Cho đường thẳng (d) :  $y = ax - 2$  ( $a \neq 0$ ) ;

a) Xác định hệ số a để đường thẳng (d) tạo với trục Ox một góc  $\alpha = 45^\circ$ .

b) Với giá trị vừa tìm được của a, tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d).

42. Cho hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).

a) Xác định hệ số a biết đồ thị (P) của nó đi qua A(4 ; 4).

b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A và tiếp xúc với (P).

43. Cho parabol (P) :  $y = x^2$  và đường thẳng (d) :  $y = -x + 2$ .

a) Chứng minh rằng (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B nằm về hai phía của trục tung.

b) Chứng minh rằng tam giác AOB là tam giác vuông. Tính diện tích của tam giác đó.



44. Cho parabol (P) :  $y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng (d) :  $ax + y = 1$ .

- Chứng minh rằng (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
- Xác định a để AB có độ dài ngắn nhất. Tính độ dài ngắn nhất đó.

## *Chuyên đề 6*

# CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

### A. Kiến thức cần nhớ

#### 1. Định nghĩa bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng  $a < b$  (hay  $a > b$  ;  $a \leq b$  ;  $a \geq b$ ) là bất đẳng thức.

#### 2. Tính chất của bất đẳng thức

1)  $a < b \Leftrightarrow b > a$ .

2)  $a < b$  ;  $b < c \Rightarrow a < c$ .

3)  $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ .

4)  $a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$  nếu  $c > 0$ .

$a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$  nếu  $c < 0$ .

5) Cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều được một bất đẳng thức cùng chiều.

6) Trừ từng vế của hai bất đẳng thức khác chiều được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức thứ nhất.

7) Nhân từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm ta được một bất đẳng thức cùng chiều. Đặc biệt :

•  $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$  ;  $|a| > |b| \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}$ .

•  $a > b \Rightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$ .

8) Nếu  $a > b > 0$  thì  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

#### 3. Một số hằng bất đẳng thức hay dùng

1) Nếu a và b là hai số cùng dấu thì

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ (dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b \text{)}.$$

2) Nếu  $a, b > 0$  thì  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$  (dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow a = b$ ).

3)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (dấu "=" xảy ra khi  $a \cdot b \geq 0$ ).

4)  $|a - b| \geq |a| - |b|$  (dấu "=" xảy ra khi  $a \geq b \geq 0$  hoặc  $a \leq b \leq 0$ ).

5) Bất đẳng thức Cô-si

$$\text{Với } a, b \geq 0 \text{ thì } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ hay } a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

(dấu "=" xảy ra khi  $a = b$ ).

Vài dạng khác của bất đẳng thức Cô-si :

- $\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{a+b}$  (với  $a > 0 ; b > 0$ ).

- $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab ; (a+b)^2 \geq 4ab ; a^2 + b^2 \geq 2ab.$

- $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$

4. Phương pháp chứng minh bất đẳng thức

1) Phương pháp dùng định nghĩa của bất đẳng thức :

- Muốn chứng minh  $a < b$ , ta chứng minh  $a - b < 0$ .

- Muốn chứng minh  $a > b$ , ta chứng minh  $a - b > 0$ .

2) Phương pháp biến đổi tương đương :

$$A < B \Leftrightarrow A_1 < B_1 \Leftrightarrow A_2 < B_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow C < D.$$

Nếu bất đẳng thức cuối đúng thì bất đẳng thức đầu đúng.

3) Phương pháp vận dụng tính chất của bất đẳng thức và vận dụng những hằng bất đẳng thức quen thuộc :

Từ các bất đẳng thức đã biết ta dùng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

4) Phương pháp phản chứng :

Muốn chứng minh  $A < B$ , ta giả sử  $A \geq B$  rồi suy ra một điều vô lí (mâu thuẫn với điều đã cho hoặc đã biết), từ đó suy ra điều giả sử là sai, điều phải chứng minh là đúng).

## B. Một số ví dụ

Ví dụ 30. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

*Giải*

*Cách thứ nhất :*

Xét hiệu  $H = (a + b + c) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$

$$H = \frac{2a + 2b + 2c - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ca}}{2}$$

$$H = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2}{2}.$$

$H \geq 0$  vì  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ ;  $(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0$ ;  $(\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \geq 0$ .

Vậy  $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$  (dấu "=" xảy ra khi  $a = b = c$ ).

*Cách thứ hai :* (biến đổi tương đương)

Ta có  $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$

$$\Leftrightarrow a + b + c - \sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a + 2b + 2c - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ca}}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2}{2} \geq 0$$

(dấu "=" xảy ra khi  $a = b = c$ ).

Bất đẳng thức cuối đúng nên bất đẳng thức đã cho đúng.

*Cách thứ ba :* (Dùng các tính chất của bất đẳng thức)

Vì  $a, b, c \geq 0$  nên theo bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được :

$$2(a + b + c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

Suy ra  $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$  (dấu "=" xảy ra khi  $a = b = c$ ).

*Cách thứ tư : (Phản chứng)*

Giả sử  $a + b + c < \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$ .

Suy ra  $a + b + c - \sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ac} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2a + 2b + 2c - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ac}}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2}{2} < 0.$$

Điều này vô lí vì  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \geq 0$

Vậy điều giả sử là sai, suy ra bất đẳng thức đã cho là đúng.

**Ví dụ 31.** Cho  $a, b, c$  là ba số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} > 1.$$

*Giải.* Vì  $a, b, c$  dương nên  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

Suy ra  $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ .

Do đó  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} < \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$  (vì  $\sqrt{a} > 0$ ).

Tương tự ta có :  $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} < \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$  ;  $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} < \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$ .

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được :

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} < \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$$

Suy ra  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} > 1.$

**Ví dụ 32.** Cho  $a > 0, b > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

**Giải.** Ta có  $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \geq \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad (\text{vì } \sqrt{ab} > 0)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b) \geq \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\Leftrightarrow a - \sqrt{ab} + b \geq \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (\text{dấu "=" xảy ra khi } a = b).$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

**Ví dụ 33.** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn điều kiện  $x + y = 2$ .

Chứng minh rằng  $x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2$ .

**Giải.** Vì  $x, y > 0$  nên  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$  (bất đẳng thức Cô-si).

Suy ra  $2 \geq 2\sqrt{xy}$  (vì  $x + y = 2$ ) hay  $0 < \sqrt{xy} \leq 1$ .

Do đó  $0 < xy \leq 1$ , dẫn tới  $x^2y^2 \leq xy$ .

Xét vế trái  $x^2y^2(x^2 + y^2) \leq xy[(x + y)^2 - 2xy]$

$$= xy(4 - 2xy) \quad (\text{do } x + y = 2).$$

$$= -2x^2y^2 + 4xy$$

$$= -2(x^2y^2 - 2xy + 1 - 1)$$

$$= -2(xy - 1)^2 + 2 \leq 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $\begin{cases} x = y \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$

### C. Bài tập

45. Cho  $x \geq 0$ , chứng minh rằng :

a)  $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+1} - 1$  ;

b)  $\frac{x+5}{\sqrt{x+4}} > 2$ .

46. Cho  $a, b, c \geq 0$ , chứng minh rằng :

a)  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$  ;

b)  $\frac{a}{2b+3c} + \frac{2b+3c}{4a} \geq 1$ .

47. Chứng minh rằng :

$$\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{200}}{200} > 10 + 5\sqrt{2}.$$

48. Chứng minh rằng :

$$S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} > 4.$$

49. Cho  $a \geq 1, b \geq 1$ , chứng minh rằng :

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab.$$

50. Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn điều kiện  $a > c ; b > c$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

51. Giải phương trình

$$\sqrt{(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 4x + 7)} = x^2 - 3x + 6. \quad (1)$$

### Chuyên đề 7

## GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

### A. Kiến thức cần nhớ

1. Bất phương trình ẩn  $x$  có dạng  $A(x) < B(x)$  ;  $A(x) > B(x)$  ;  $A(x) \leq B(x)$  ;  $A(x) \geq B(x)$  trong đó  $A(x)$  và  $B(x)$  là hai biểu thức của cùng biến  $x$ .

2. Hai quy tắc biến đổi bất phương trình

a) Quy tắc chuyển vế.

b) Quy tắc nhân với một số :

Khi nhân hai vế của một bất phương trình với cùng một số khác 0 ta phải :

– Giữ nguyên chiều của bất đẳng thức nếu số đó dương ;

– Đổi chiều của bất đẳng thức nếu số đó âm.

3. Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng  $ax + b < 0$  (dấu "<" có thể thay bởi dấu  $>$  ;  $\leq$  ;  $\geq$ ), trong đó  $x$  là ẩn,  $a, b$  là các số đã cho,  $a \neq 0$ .

Bất phương trình  $ax + b < 0$  ( $a \neq 0$ ) có nghiệm duy nhất :

$$x < -\frac{b}{a} \text{ nếu } a > 0 ;$$

$$x > -\frac{b}{a} \text{ nếu } a < 0.$$

4. Các trường hợp đặc biệt

•  $0x < m$  (1) :

– Nếu  $m \leq 0$  thì (1) vô nghiệm ;

– Nếu  $m > 0$  thì (1) có nghiệm tùy ý.

•  $0x > m$  (2) :

– Nếu  $m < 0$  thì (2) có nghiệm tùy ý ;

– Nếu  $m \geq 0$  thì (2) vô nghiệm.

5. Bất phương trình đưa được về dạng  $ax + b < 0$  (hoặc  $ax + b > 0$ )

• Bất phương trình dạng tích :

Nếu bất phương trình thu gọn được về dạng  $A(x).B(x) < 0$  hoặc  $A(x).B(x) > 0$  thì lúc đó :

$$A(x).B(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 ; B(x) < 0 \\ A(x) < 0 ; B(x) > 0. \end{cases}$$

$$A(x).B(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 ; B(x) > 0 \\ A(x) < 0 ; B(x) < 0. \end{cases}$$

• Bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

– Tìm ĐKXĐ ;

– Chuyển tất cả các hạng tử sang một vế, vế kia là số 0 ;

– Thu gọn về dạng  $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$  hoặc  $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ .

Khi đó :

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 ; B(x) < 0 \\ A(x) < 0 ; B(x) > 0. \end{cases}$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 ; B(x) > 0 \\ A(x) < 0 ; B(x) < 0. \end{cases}$$

## 6. Giải bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp chung là xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Một số dạng đặc biệt :

$$\text{Dạng 1 : } |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$\text{Dạng 2 : } |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$$

$$\text{Dạng 3 : } |f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2 \\ |f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2.$$

## B. Một số ví dụ

Ví dụ 34. Giải bất phương trình

$$\frac{mx + 5}{12} + \frac{x - 1}{4} > 2. \quad (1)$$

**Giải**

$$(1) \Leftrightarrow mx + 5 + 3(x - 1) > 24$$

$$\Leftrightarrow (m + 3)x > 22.$$

• Nếu  $m > -3$  thì  $x > \frac{22}{m + 3}$

• Nếu  $m < -3$  thì  $x < \frac{22}{m + 3}$

• Nếu  $m = -3$  ta có  $0 \cdot x > 22$ , bất phương trình vô nghiệm.



**Ví dụ 35.** Giải bất phương trình

$$\frac{2x}{x+1} - \frac{x-3}{x-1} > 1. \quad (1)$$

**Giải.** ĐKXD :  $x \neq \pm 1$ . Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} - \frac{x-3}{x-1} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(x-1) - (x-3)(x+1) - (x^2-1)}{x^2-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x^2-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \text{ (vì } 4 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

**Ví dụ 36.** Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2 - 3x} > x - 2. \quad (1)$$

**Giải.** ĐKXD :  $x(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$  hoặc  $x \geq 3$ .

• Với  $x \leq 0$  thì  $\sqrt{x(x-3)} \geq 0$  còn  $x-2 < 0$

nên  $x \leq 0$  là nghiệm của (1).

• Với  $x \geq 3$  thì cả hai vế đều không âm. Bình phương hai vế ta được :

$$x^2 - 3x > x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow x > 4 \text{ (thuộc khoảng đang xét).}$$

Vậy nghiệm của (1) là  $x \leq 0$  hoặc  $x > 4$ .

**Ví dụ 37.** Giải bất phương trình

$$|x^2 + 5x - 3| < x^2 + 7x - 11. \quad (1)$$

**Giải**

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 3 < x^2 + 7x - 11 & (*) \\ x^2 + 5x - 3 > -(x^2 + 7x - 11) & (**) \end{cases}$$

• Giải bất phương trình (\*) ta được

$$(*) \Leftrightarrow 2x > 8 \Leftrightarrow x > 4.$$

• Giải bất phương trình (\*\*) ta được

$$(**) \Leftrightarrow x^2 + 6x - 7 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 7) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \text{ và } x + 7 > 0 \\ x - 1 < 0 \text{ và } x + 7 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \text{ và } x > -7 \\ x < 1 \text{ và } x < -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -7. \end{cases}$$

Nghiệm của bất phương trình (1) phải thỏa mãn cả (\*) và (\*\*) nên nghiệm của (1) là  $x > 4$ .

### C. Bài tập

52. Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  thỏa mãn cả hai bất phương trình :

$$\frac{x + 2}{5} - \frac{3(x - 4)}{4} < 3 \quad (1)$$

$$\frac{4x + 2}{7} + \frac{11x + 3}{12} < 5 \quad (2).$$

53. Giải bất phương trình :

$$\frac{(m + 1)x}{2} - \frac{3x + 2}{5} \geq \frac{10m - 6}{10} \quad (m \text{ là tham số}). \quad (1)$$

54. Cho bất phương trình :

$$2mx - 19 > x \quad (m \text{ là tham số}). \quad (1)$$

a) Giải bất phương trình khi  $m = \sqrt{5}$ .

b) Tìm các giá trị của  $m$  để bất phương trình nhận mọi giá trị  $x > 1$  là nghiệm.

55. Tìm các giá trị của  $x$  để các biểu thức sau có nghĩa :

a)  $A = \sqrt{25 - x^2}$  ;

b)  $B = \sqrt{x^2 - 9}$  ;

c)  $C = \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 - 9}$ .

56. Giải các bất phương trình :

a)  $\frac{6x + 1}{3x - 1} < 2$  ;

b)  $\frac{4x + 5}{x - 4} \leq 1$ .

57. Giải các bất phương trình :

a)  $|8x - 5| < 3$  ;

b)  $|5x + 7| < 3x - 1$  ;

c)  $|2x - 5| > x - 1$  ;

d)  $|x - 4| > |2x + 1|$ .

58. Giải các bất phương trình :

a)  $\sqrt{7x - 5} < 4$  ;

b)  $\sqrt{25x^2 - 20x + 4} > 4x + 1$  ;

c)  $\sqrt{x^2 + 6x} > 2\sqrt{10}$ .

### Chuyên đề 8

## TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC

### A. Kiến thức cần nhớ

#### 1. Định nghĩa :

Cho biểu thức  $f(x)$

a) Nếu với mọi  $x$  thỏa mãn ĐKXĐ của  $f(x)$  mà :

- $f(x) \leq m$  ( $m$  là hằng số)
- Tồn tại  $x = x_0$  sao cho  $f(x_0) = m$

thì ta nói  $m$  là giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức  $f(x)$  và kí hiệu là  $\max f = m$ .

b) Nếu với mọi  $x$  thỏa mãn ĐKXĐ của  $f(x)$  mà :

- $f(x) \geq m$  ( $m$  là hằng số)
- Tồn tại  $x = x_0$ , sao cho  $f(x_0) = m$

thì ta nói  $m$  là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của  $f(x)$  và kí hiệu là  $\min f = m$ .

*Chú ý :* Khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa một biến cũng được mở rộng cho biểu thức chứa nhiều biến.

#### 2. Cách tìm GTLN, GTNN của một biểu thức

a) Để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $f(x)$  ta cần :

– Chứng minh  $f(x) \leq m$  với mọi  $x$ , đồng thời chỉ rõ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi nào, chẳng hạn tại  $x = x_0$ .

– Kết luận :  $\max f = m$  khi và chỉ khi  $x = x_0$ .

b) Để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $f(x)$  ta cần :

– Chứng minh  $f(x) \geq m$  với mọi  $x$ , đồng thời chỉ rõ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi nào, chẳng hạn tại  $x = x_0$ .

– Kết luận :  $\min f = m$  khi và chỉ khi  $x = x_0$ .

### 3. Cách tìm hằng số $m$

a) Dựa vào các nhận xét sau :

•  $A^2 \geq 0$ , dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow A = 0$ .

•  $A^2 + m \geq m$ , dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow A = 0$ .

•  $-A^2 + m \leq m$ , dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow A = 0$ .

• Với  $a$  và  $b$  cùng dấu thì  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ , (dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow a = b$ ).

• Với  $a$  và  $b$  khác dấu thì  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$ , (dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow a = -b$ ).

b) Từ bất đẳng thức Cô-si :  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  ta suy ra :

• Với hai số dương  $a$  và  $b$ , nếu tích  $ab$  không đổi,  $ab = k$  ( $k$  là hằng số dương) thì  $\min(a + b) = 2\sqrt{k}$  (khi và chỉ khi  $a = b$ ).

• Với hai số dương  $a$  và  $b$ , nếu tổng  $a + b$  không đổi,  $a + b = k$  ( $k$  là hằng số) thì :

$\max(a.b) = \frac{k^2}{4}$  (khi và chỉ khi  $a = b$ ).

c) Đối với tam thức bậc hai hoặc phân thức có mẫu và tử có bậc không quá hai, ta có thể dùng phương pháp miền giá trị của hàm số. Để tìm được miền giá trị này ta sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai là  $\Delta \geq 0$  (xem ví dụ 38).

4. Chú ý : Nếu  $A > 0$  thì

$A$  lớn nhất  $\Leftrightarrow \frac{1}{A}$  nhỏ nhất ;

$A$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow \frac{1}{A}$  lớn nhất.

## B. Một số ví dụ

Ví dụ 38. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 5x^2 - 20x + 30.$$

*Giải*

*Cách 1.* Vận dụng tính chất  $A^2 \geq 0$ .

Ta có  $P = 5(x^2 - 4x + 6)$

$$= 5(x^2 - 4x + 4 + 2)$$

$$= 5(x - 2)^2 + 10 \geq 10. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = 2.$$

Vậy min  $P = 10$  khi  $x = 2$ .

*Cách 2 :* Vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai là  $\Delta \geq 0$ .

Biểu thức  $P$  nhận giá trị thực khi và chỉ khi phương trình sau phải có nghiệm :

$$5x^2 - 20x + 30 = P \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 5x^2 - 20x + 30 - P = 0 \quad (2)$$

$$\text{Xét } \Delta' = 100 - 5(30 - P) = 5P - 50$$

$$(2) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 5P - 50 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq 10.$$

Do đó min  $P = 10$  khi và chỉ khi phương trình có nghiệm kép  $x = \frac{-b'}{a} = 2$ .

Ví dụ 39. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{x + 4\sqrt{x} + 20}{2(\sqrt{x} + 2)}.$$

*Giải.* ĐKXD :  $x \geq 0$ .

$$\text{Ta có } Q = \frac{x + 4\sqrt{x} + 20}{2(\sqrt{x} + 2)} = \frac{x + 4\sqrt{x} + 4 + 16}{2(\sqrt{x} + 2)}$$

$$Q = \frac{(\sqrt{x} + 2)^2 + 16}{2(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{2} + \frac{8}{\sqrt{x} + 2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với hai số dương  $\frac{\sqrt{x} + 2}{2}$  và  $\frac{8}{\sqrt{x} + 2}$  ta được

$$Q \geq 2 \sqrt{\frac{\sqrt{x} + 2}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{x} + 2}} = 2\sqrt{4} = 4.$$

Vậy min  $Q = 4$  khi và chỉ khi  $\frac{\sqrt{x} + 2}{2} = \frac{8}{\sqrt{x} + 2} \Leftrightarrow x = 4.$

**Ví dụ 40.** Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi là 100 m, hình chữ nhật nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó.

**Giải.** Gọi  $a$  và  $b$  là hai kích thước của hình chữ nhật.

Ta có  $a + b = 50.$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} = \frac{50}{2} = 25.$$

Suy ra  $ab \leq 625.$

Do đó  $\max(ab) = 625$  khi và chỉ khi  $a = b$ , nghĩa là hình chữ nhật đó là hình vuông.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là  $S = 625 \text{ m}^2$ , khi và chỉ khi hình chữ nhật đó là hình vuông.

**Ví dụ 41.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{15}{\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 10}}.$$

**Giải.** ĐK :  $x \geq 0.$

Ta có  $A = \frac{15}{\sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2 + 9}} > 0$

Suy ra  $A$  lớn nhất  $\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2 + 9}$  nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 \text{ nhỏ nhất}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Lúc đó  $\max A = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5$  khi và chỉ khi  $x = 1.$

**Ví dụ 42.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = |x - 2| + |x - 5|.$$

**Giải.** Ta có  $A = |x - 2| + |x - 5| = |x - 2| + |5 - x|$ .

Áp dụng bất đẳng thức  $|a| + |b| \geq |a + b|$  ta được

$$A \geq |x - 2 + 5 - x| = |3| = 3.$$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow (x - 2)(5 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$ .

Vậy  $\min A = 3$  khi và chỉ khi  $2 \leq x \leq 5$ .

**Ví dụ 43.** Cho  $x + y + z = 6$ , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = x^2 + y^2 + z^2.$$

**Giải.** Ta đặt  $x = 2 + a$ ;  $y = 2 + b$ ;  $z = 2 + c$

Suy ra  $x + y + z = 6 + a + b + c$ .

Mặt khác  $x + y + z = 6$  nên  $a + b + c = 0$ .

Ta có  $B = x^2 + y^2 + z^2 = (2 + a)^2 + (2 + b)^2 + (2 + c)^2$

$$= 12 + 4(a + b + c) + (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= 12 + (a^2 + b^2 + c^2) \text{ (vì } a + b + c = 0)$$

Do đó  $B \geq 12$  (vì  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ )

Vậy  $\min B = 12$  khi và chỉ khi  $a = b = c = 0$  hay  $x = y = z = 2$ .

**Nhận xét:** Nếu  $x + y + z = k$  thì ta đặt biến mới là  $a, b, c$  sao cho

$$x = \frac{k}{3} + a; \quad y = \frac{k}{3} + b; \quad z = \frac{k}{3} + c.$$

**Ví dụ 44.** Cho  $x \geq 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x + \frac{1}{x}$ .

**Giải**

*Cách giải dẫn đến bế tắc:*

$$\text{Ta có } P = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{1} = 2.$$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$ .

Giá trị  $x = 1$  không thỏa mãn điều kiện  $x \geq 2$ .

*Cách giải đúng:*

$$\text{Ta có } P = x + \frac{1}{x} = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) + \frac{3x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} + \frac{3x}{4}, \text{ suy ra}$$

$$P \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{3 \cdot 2}{4} \quad (\text{vì } x \geq 2).$$

$$P \geq 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thoả mãn).}$$

Vậy  $\min P = \frac{5}{2}$  khi và chỉ khi  $x = 2$ .

### C. Bài tập

59. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức

a)  $A = -3x^2 - 6x + 2$  ;

b)  $B = \frac{23}{4x^2 - 5x + 3}$  ;

c)  $C = -\sqrt{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{2}$ .

60. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = -\frac{3x + \sqrt{x} + 6}{\sqrt{x}}.$$

61. Tìm cặp số  $(x ; y)$  thỏa mãn phương trình sau sao cho  $y$  đạt giá trị nhỏ nhất

$$2x^2 - 12x - y + 19 = 0. \quad (1)$$

62. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2x}{x^2 - 2x + 4}.$$

63. Cho hai bộ số  $(a, b)$  và  $(m, n)$  trong đó  $a, b, m, n$  khác 0.

a) Chứng minh rằng  $(am + bn)^2 \leq (a^2 + b^2)(m^2 + n^2)$ .

b) Áp dụng : Cho các số dương  $x$  và  $y$  thỏa mãn điều kiện  $x + 2\sqrt{y} = 5$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = x + y$ .

64. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :  $A = |x + 3| - |x - 4|$ .



65. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = x^2 + 3x + \frac{1}{x} \text{ với } x > 0.$$

66. Cho  $x \geq 4$ , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$C = x + \frac{1}{x+1}.$$

67. Cho các số dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = a$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng  $S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ .

68. Cho biểu thức  $A = \frac{x^2 + 3y^2}{xy}$  trong đó  $x, y > 0$  thỏa mãn  $x \geq 3y$ . Tìm min A.

69. Cho biểu thức  $B = 3x^2 - x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$  trong đó  $x > 0$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của B.

### Chuyên đề 9

## GIẢI TOÁN CÓ NỘI DUNG SỐ HỌC

### A. Kiến thức cần nhớ

#### I. Phép chia hết và phép chia có dư

##### 1. Định nghĩa

Cho  $a, b, q \in \mathbb{Z}, b \neq 0$

$$a : b \Leftrightarrow a = b.q;$$

$$a \text{ l } b \Leftrightarrow a = b.q + r \text{ trong đó } 0 < r < |b|, r \in \mathbb{Z}.$$

##### 2. Tính chất chia hết

Cho  $a, b, x, y, m \in \mathbb{Z}$

1)  $a : b ; b : m \Rightarrow a : m$

2)  $a : xy \Rightarrow a : x \text{ và } a : y$

3)  $a : x ; b : y \Rightarrow ab : xy$

$$4) a \div m ; b \div m \Rightarrow (ax \pm by) \div m$$

Đặc biệt, nếu  $(a \pm b) \div m$  và  $a \div m$  thì  $b \div m$ .

$$5) a \nmid m ; b \div m \Rightarrow (a \pm b) \nmid m$$

$$6) ab \div m \text{ mà } (a ; m) = 1 \text{ thì } b \div m.$$

$$7) a \div x \text{ và } a \div y \text{ mà } (x ; y) = 1 \text{ thì } a \div xy$$

8) Nếu  $a$  và  $b$  chia cho  $m$  có cùng số dư thì hiệu  $a - b$  chia hết cho  $m$ .

### *Nhận xét*

- Trong  $n$  số nguyên liên tiếp luôn có một và chỉ một số chia hết cho  $n$ .
- Tích của  $n$  số nguyên liên tiếp chia hết cho  $n$ .

## **II. Số chính phương**

### **1. Định nghĩa**

Số chính phương là số bằng bình phương của một số nguyên.

Ví dụ số 81 là một số chính phương, vì  $81 = 9^2$ .

### **2. Tính chất của số chính phương**

- 1) Số chính phương không có tận cùng bằng các chữ số 2 ; 3 ; 7 ; 8.
- 2) Số chính phương chia cho 3, chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1 ; chia cho 5 dư 0, dư 1 hoặc dư 4.
- 3) Số chính phương lẻ chia cho 4, chia cho 8 đều dư 1.

Ví dụ : số 25 là số chính phương lẻ.

25 chia cho 4 được thương là 6 dư 1 ;

25 chia cho 8 được thương là 3 dư 1.

## **III. Nguyên lí Đê-rich-lê**

1. Nếu nhốt  $n + 1$  con thỏ vào  $n$  cái lồng ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) thì ít nhất cũng có một lồng nhốt từ hai con thỏ trở lên.

Tổng quát : Nếu nhốt  $a$  con thỏ vào  $b$  cái lồng mà  $a = b.q + r$  ( $0 < r < b$ ) thì ít nhất cũng có một lồng nhốt từ  $q + 1$  con thỏ trở lên.

Ví dụ : Từ đẳng thức  $13 = 3.4 + 1$  suy ra nếu nhốt 13 con thỏ vào 3 cái lồng thì ít nhất cũng có một cái lồng nhốt từ 5 con thỏ trở lên.

2. Áp dụng vào chia hết : Trong  $n + 1$  số tự nhiên bao giờ cũng có thể chọn ra hai số mà hiệu của chúng chia hết cho  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

## B. Một số ví dụ

**Ví dụ 45.** Cho hai số tự nhiên, mỗi số có 3 chữ số, khi chia cho 7 thì có cùng một số dư. Viết hai số tự nhiên đó liền nhau thì được một số có 6 chữ số. Chứng minh rằng số có 6 chữ số này chia hết cho 7.

**Giải.** Gọi hai số tự nhiên có ba chữ số đó là  $\overline{abc}$  và  $\overline{mnp}$ . Vì các số này chia cho 7 có cùng một số dư nên :

$$\overline{abc} = 7k + r ; \overline{mnp} = 7l + r.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overline{abcmnp} &= 1000\overline{abc} + \overline{mnp} \\ &= 1000(7k + r) + 7l + r \\ &= 7(1000k + l) + 1001r. \end{aligned}$$

Vì  $7 : 7 ; 1001 : 7$  nên  $\overline{abcmnp} : 7$ .

**Ví dụ 46.** Chứng minh rằng với mọi  $n \in \mathbb{N}$  thì :

a)  $9^n + 1 \not\equiv 40$  ;

b)  $n^2 + n + 2 \not\equiv 9$ .

**Giải**

a) Ta có  $9^n + 1 = (8 + 1)^n + 1 = B(8) + 1^n + 1 = B(8) + 2 \not\equiv 4$

Suy ra  $9^n + 1 \not\equiv 40$ .

b) Xét các trường hợp số dư của  $n$  khi chia cho 3 :

• Nếu  $n = 3k$  thì  $n^2 + n + 2 = 9k^2 + 3k + 2 \not\equiv 3$ .

• Nếu  $n = 3k + 1$  thì  $n^2 + n + 2 = (3k + 1)^2 + (3k + 1) + 2$   
 $= 9k^2 + 9k + 4 \not\equiv 3$ .

• Nếu  $n = 3k + 2$  thì  $n^2 + n + 2 = (3k + 2)^2 + (3k + 2) + 2$  ,  
 $= 9k^2 + 15k + 8 \not\equiv 3$ .

Vậy  $n^2 + n + 2 \not\equiv 3$  suy ra  $n^2 + n + 2 \not\equiv 9$ .

**Lưu ý :** Trong cách giải của câu a, ta đã dùng tính chất sau :

$$(a + b)^n = B(a) + b^n = B(b) + a^n.$$

**Ví dụ 47.** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  sao cho  $n^2 + 1 : (n + 1)$ .

**Giải.** Ta có  $n^2 + 1 = n^2 - 1 + 2 = (n - 1)(n + 1) + 2$ .

Do đó  $n^2 + 1 \div (n + 1) \Leftrightarrow 2 \div (n + 1)$ .

Vậy  $n + 1 \in U(2) = \{1; -1; 2; -2\}$ .

$n + 1$	1	-1	2	-2
$n$	0	-2	1	-3

Do đó  $n \in \{-3; -2; 0; 1\}$ .

**Ví dụ 48.** Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.

**Giải.** Gọi bốn số nguyên liên tiếp lần lượt là  $n, n + 1, n + 2$ , và  $n + 3$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 \\ &= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2. \end{aligned}$$

Rõ ràng  $(n^2 + 3n + 1)^2$  là một số chính phương.

**Ví dụ 49.** Chứng minh rằng tổng các bình phương của 6 số nguyên liên tiếp không thể là số chính phương.

**Giải**

Gọi 6 số nguyên liên tiếp lần lượt là

$$a - 3, a - 2, a - 1, a, a + 1 \text{ và } a + 2.$$

$$\text{Ta có } S = (a - 3)^2 + (a - 2)^2 + (a - 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2 + (a + 2)^2$$

$$S = 6a^2 - 6a + 19 = 6a(a - 1) + 16 + 3.$$

Vì  $a(a - 1)$  là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, do đó  $6a(a - 1)$  chia hết cho 4. Hiển nhiên 16 chia hết cho 4.

Suy ra  $S$  chia cho 4 dư 3.

Do đó  $S$  không là số chính phương, vì số chính phương chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

**Ví dụ 50.** Cho ba số nguyên  $a, b, c$ . Chứng minh rằng tích  $P = (a - b)(b - c)(c - a)$  là một số chẵn.

**Giải**

Chia ba số nguyên cho 2 thì ít nhất cũng có hai trong ba số đó có cùng số dư. Hiệu của hai số này chia hết cho 2. Hiệu này là  $a - b$  hoặc  $b - c$  hoặc  $c - a$ . Do đó  $P$  là một số chẵn.

### C. Bài tập

70. Cho một số có ba chữ số trong đó chữ số hàng trăm và chữ số hàng chục đều là số lẻ. Chứng minh rằng hiệu của số có ba chữ số này với số đó viết theo thứ tự ngược lại thì chia hết cho 198.
71. Chứng minh rằng  $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 19^3 \div 20$
72. Cho các số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_5$  và  $b_1, b_2, \dots, b_5$  cũng là các số nguyên đó nhưng lấy theo thứ tự khác.  
Chứng minh rằng tích  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\dots(a_5 - b_5) \div 2$ .
73. Cho biểu thức  $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc$ . Chứng minh rằng :  
a) Có thể biểu diễn  $P$  dưới dạng  $(a + b + c)(ab + bc + ca) - 2abc$ .  
b) Nếu  $a + b + c \div 4$  thì  $P \div 4$ .
74. Chứng minh rằng tích của một số chính phương với số tự nhiên đứng liền trước nó thì chia hết cho 12.
75. Chứng minh rằng các số sau là số chính phương :  
a)  $M = \underbrace{11\dots1}_{2n \text{ chữ số}} + \underbrace{44\dots4}_{n \text{ chữ số}} + 1$ .  
b)  $\underbrace{11\dots1}_n \cdot 2 \cdot \underbrace{11\dots1}_n \cdot 4 + 1$ .
76. Tìm số chính phương  $\overline{abcd}$  biết  $\overline{ab} - \overline{cd} = 4$ .
77. Tìm số chính phương có bốn chữ số, hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau.
78. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$  thì  $(n!)^4 + 7$  không thể là số chính phương.
79. Cho dãy số  $7, 7^2, 7^3, \dots, 7^{1001}$  (1)  
Chứng minh trong dãy này có một số có tận cùng là 001.
80. Chứng minh rằng trong 32 số nguyên bất kì luôn tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 60.

# PHẦN HAI. CÁC CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC

## Chuyên đề 10

### CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC

#### A. Kiến thức cần nhớ

- Chứng minh tổng (hoặc hiệu) hai đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng thứ ba.*  
Bạn có thể:
  - Chia đoạn thẳng lớn nhất thành hai phần, sao cho một phần bằng đoạn thẳng thứ nhất và chứng minh phần còn lại bằng đoạn thẳng thứ hai.
  - Dựng tổng của hai đoạn thẳng cho trước rồi chứng minh tổng này bằng đoạn thẳng thứ ba.
- Chứng minh tổng (hoặc hiệu) hai góc bằng góc thứ ba:*
  - Ta có thể làm tương tự như chứng minh tổng (hoặc hiệu) hai đoạn thẳng bằng đoạn thẳng thứ ba.
  - Dùng định lý về góc nội tiếp: Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng  $90^0$ ) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Chứng minh hai hệ thức hình học bằng nhau:*
  - Dùng định lý Ta-lét: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì tạo ra những cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
  - Hai tam giác đồng dạng thì các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ, các cặp góc tương ứng bằng nhau.
  - Dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông.
  - Dùng tính chất:* Đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M kẻ hai đường thẳng. Đường thẳng thứ nhất cắt (O) tại A và B. Đường thẳng thứ hai cắt (O) tại C và D.  
Ta có  $MA.MB = MC.MD$ .
  - Dùng tính chất:* Nếu từ một điểm M ở ngoài đường tròn, vẽ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB thì  $MT^2 = MA.MB$ .

## B. Một số ví dụ

**Ví dụ 1.** Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ BC. Chứng minh rằng  $MB + MC = MA$ .

*Phân tích tìm lời giải.* Để chứng minh  $AM = BM + CM$ , lẽ tự nhiên chúng ta có hai ý tưởng: thứ nhất, tách AM thành hai đoạn, đoạn thứ nhất bằng BM và chứng minh đoạn thứ hai bằng CM; thứ hai, có thể dựng một đoạn thẳng bằng  $BM + CM$  rồi chứng minh đoạn thẳng đó bằng AM. Thật vậy, ta có lời giải sau:

**Giải**

*Cách 1 (h.1).* Trên tia MA lấy điểm D sao cho  $MD = MB$ .

$\Delta BMD$  có  $MD = MB$ ,  $\widehat{BMD} = \widehat{BCA} = 60^\circ$   
(góc nội tiếp cùng chắn  $\widehat{AB}$ )  $\Rightarrow \Delta BMD$  đều  
 $\Rightarrow BD = BM$ ;  $\widehat{MBD} = 60^\circ$ .

Xét  $\Delta ABD$  và  $\Delta CBM$  có  $AB = BC$ ;

$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_3 (= 60^\circ - \widehat{B}_2)$ ;  $BD = BM$

nên  $\Delta ABD = \Delta CBM$  (c.g.c)  $\Rightarrow AD = MC$ .

Vậy  $MB + MC = MD + AD = MA$ .

*Cách 2 (h.2).* Trên tia đối của tia MB, lấy điểm E sao cho  $ME = MC$ .

Tứ giác ABMC nội tiếp có  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  nên

$\widehat{BMC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CME} = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta CME$  đều  $\Rightarrow CM = CE$ ;  $\widehat{C}_3 = 60^\circ$ .

Xét  $\Delta ACM$  và  $\Delta BCE$  có  $AC = BC$ ,

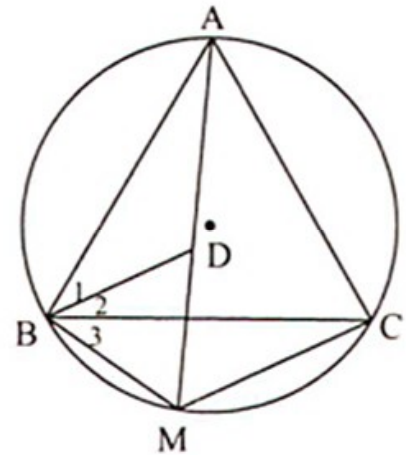
$\widehat{ACM} = \widehat{BCE} (= 60^\circ + \widehat{C}_2)$ ,  $CM = CE$  nên

$\Delta ACM = \Delta BCE$  (c.g.c)

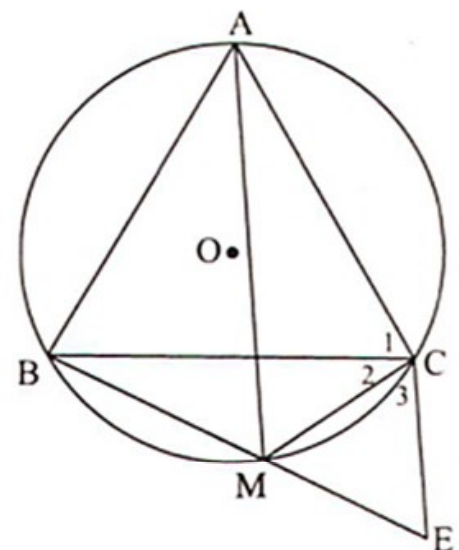
$\Rightarrow AM = BE = BM + ME$  hay  $AM = BM + MC$ .

**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, trực tâm H. Người ta dựng hình bình hành BHCD và gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành đó.

a) Chứng minh tứ giác ABDC nội tiếp được.



Hình 1



Hình 2

- b) So sánh góc BAH và OAC (O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).
- c) Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.
- d) Tìm điều kiện ràng buộc giữa các góc B và C để OH song song với BC.

**Giải (h.3)**

a) Ta có  $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$   
nên tứ giác ABDC nội tiếp được.

b) Tam giác OAC cân tại O nên

$$\widehat{OAC} = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{BAH}.$$

**Nhận xét.** Bạn có thể chứng minh

$$\Delta A'BA \sim \Delta CDA.$$

c) Do  $DB \parallel CH$  nên  $DB \perp AB$ , suy ra D đối xứng với A qua O.

Xét tam giác DAH có  $OI \parallel AH$  (cùng vuông góc với BC) và  $OA = OD$  nên OI là đường trung bình. Suy ra  $OI = \frac{1}{2}AH$ . Áp dụng định lí Ta-lét ta có:

$$\frac{IG}{GA} = \frac{OI}{AH} = \frac{1}{2}.$$

Vậy G là trọng tâm của tam giác ABC.

d) Gọi A' là giao điểm của AH và BC. Ta có  $OH \parallel BC$  và OIA'H là hình chữ nhật

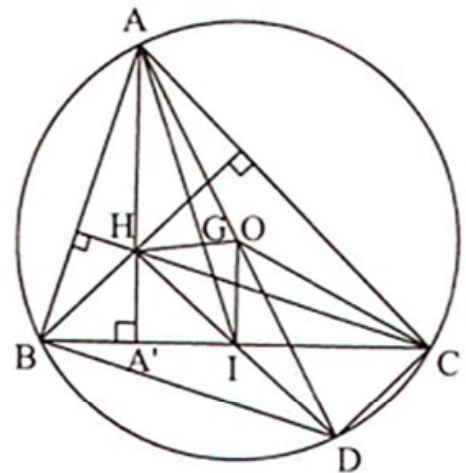
$$\text{nên } HA' = OI \Leftrightarrow HA' = \frac{1}{2}AH \Leftrightarrow HA' = \frac{1}{3}AA'$$

$$\Leftrightarrow \frac{HA'}{BA'} \cdot \frac{BA'}{AA'} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cot \widehat{BHA'} \cdot \cot \widehat{ABC} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot C \cdot \cot B = \frac{1}{3} \quad (\widehat{BHA'} = \widehat{C} \text{ vì cùng phụ với } \widehat{HBC}).$$

**Nhận xét.** Thực chất câu d) là cho  $HA' = \frac{1}{3}AA'$ , nên để tìm mối quan hệ

giữa góc B và góc C mà biết tỉ số của hai đoạn thẳng nhất thiết phải dùng tỉ số lượng giác. Từ cách giải trên bạn có thể giải được câu tổng quát sau: Tìm điều kiện ràng buộc giữa các góc B và C để  $AA' = m \cdot HA'$  (với  $m > 1$ ).



Hình 3





nằm ở tử thức hoặc là nằm cùng ở mẫu thức. Chẳng hạn  $OA \cdot OB = ON \cdot OM$   
 $\Leftrightarrow \frac{ON}{OA} = \frac{OB}{OM}$  khi đó bạn chứng minh được  $\triangle ONB \sim \triangle OAM$  hoặc

$\triangle ONA \sim \triangle OBM$ . Tuy nhiên bạn nên chọn cặp tam giác đã có.

**Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O; R) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a)  $BH \cdot BE + CE \cdot CA = BC^2$ .

b)  $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2$ .

c) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABH, ACH, BCH có bán kính bằng nhau.

**Giải** (h.5)

a)  $\triangle BDH$  và  $\triangle BEC$  có  $\widehat{BDH} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

$\widehat{CBE}$  chung nên  $\triangle BDH \sim \triangle BEC$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BD}{BE} \Rightarrow BH \cdot BE = BD \cdot BC. \quad (1)$$

$\triangle CEB$  và  $\triangle CDA$  có  $\widehat{CDA} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

$\widehat{BCA}$  chung nên  $\triangle CEB \sim \triangle CDA$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow CE \cdot AC = CD \cdot BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$BH \cdot BE + CE \cdot CA = BD \cdot BC + CD \cdot BC = (BD + CD) \cdot BC = BC^2.$$

b) Kẻ đường kính AK  $\Rightarrow KC \perp AC \Rightarrow KC \parallel BH$ ;  $KB \perp AB \Rightarrow KB \parallel CH$   
 $\Rightarrow BHCK$  là hình bình hành.

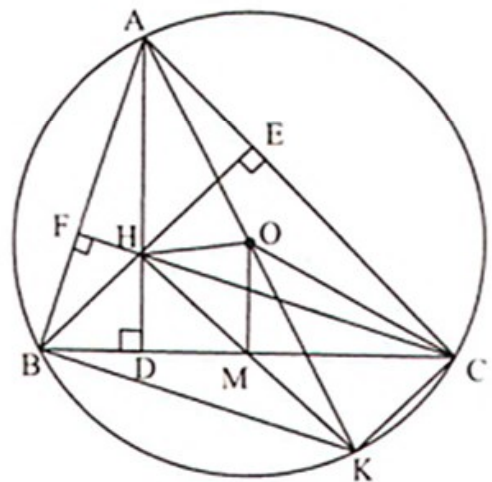
Gọi M là giao điểm của HK và BC suy ra OM là đường trung bình của  $\triangle AHK$   
 $\Rightarrow AH = 2 \cdot OM$ .

Do đó:  $AH^2 + BC^2 = 4 \cdot OM^2 + 4 \cdot MC^2 = 4 \cdot OC^2 = 4 \cdot R^2$ .

Tương tự như vậy ta được:  $BH^2 + AC^2 = 4 \cdot R^2$ ;  $CH^2 + AB^2 = 4 \cdot R^2$ .

Suy ra  $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2$ .

c) Ta có  $\triangle BHC = \triangle CKB$  nên  $\triangle BHC$  và  $\triangle CKB$  có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau. Từ đó suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BHC$  bằng R.



Hình 5

Tương tự  $\triangle AHB$ ,  $\triangle AHC$  cũng có bán kính đường tròn ngoại tiếp là  $R$ . Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

*Nhận xét.* Để chứng minh  $BH \cdot BE + CE \cdot CA = BC^2$ , bạn có thể suy luận như sau  $BH \cdot BE + CE \cdot CA = BC(x + y)$  với  $x + y = BC$ . Sau đó chứng minh  $BH \cdot BE = BC \cdot x$ ,  $CE \cdot CA = BC \cdot y$  bằng cách chọn các cặp tam giác đồng dạng. Lưu ý rằng  $BH$ ,  $BE$ ,  $BC$  đã là độ dài các cạnh của tam giác vuông nên chọn  $x$  cũng là độ dài cạnh tam giác vuông, từ đó ta có cách chứng minh trên. Cách làm trên có thể áp dụng cho các câu chứng minh tổng tích các cặp đoạn thẳng.

### C. Bài tập

- Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Tia phân giác trong của góc  $B$  cắt đường tròn tại  $D$ , tia phân giác trong của góc  $C$  cắt đường tròn tại  $E$ , hai tia phân giác này cắt nhau tại  $F$ . Gọi  $I$ ,  $K$  theo thứ tự là giao điểm của dây  $DE$  với các cạnh  $AB$ ,  $AC$ .
  - Chứng minh các tam giác  $EBF$ ,  $ADF$  là các tam giác cân.
  - Chứng minh tứ giác  $DKFC$  nội tiếp và  $FK$  song song với  $AB$ .
  - Tứ giác  $AIFK$  là hình gì? Tại sao?
  - Tìm điều kiện của tam giác  $ABC$  để tứ giác  $AEFD$  là hình thoi, đồng thời có diện tích gấp ba lần diện tích tứ giác  $AIFK$ .
- Cho nửa đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AB$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AB$  chứa nửa đường tròn đó ta kẻ tiếp tuyến  $Ax$  và dây  $AC$  bất kì. Tia phân giác của góc  $CAX$  cắt nửa đường tròn tại  $D$ , hai tia  $AD$  và  $BC$  cắt nhau tại  $E$ . Tia  $BD$  cắt  $Ax$  tại  $F$ .
  - Chứng minh rằng tam giác  $ABE$  cân.
  - Gọi  $K$  là giao điểm của  $AC$  và  $BC$ . Chứng minh rằng tứ giác  $AKEF$  là hình thoi.
  - Giả sử  $\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ , chứng minh rằng  $AK = 2 \cdot KC$ .
- Cho đường tròn  $(O)$  có một dây  $AB$  cố định và điểm  $M$  bất kì trên cung lớn  $AB$ . Vẽ đường tròn  $(O_1)$  qua  $M$  và tiếp xúc với  $AB$  tại  $A$ , đường tròn  $(O_2)$  qua  $M$  và tiếp xúc với  $AB$  tại  $B$ . Gọi  $N$  là giao điểm thứ hai của hai đường tròn  $(O_1)$  và  $(O_2)$ . Gọi  $I$ ,  $S$  lần lượt là giao điểm của tia  $MN$  với  $AB$  và đường tròn  $(O)$ . Chứng minh rằng :

- a)  $IA = IB$ .
- b)  $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 180^{\circ}$ .
- c) Tứ giác ANBS là hình bình hành.
4. Cho đường tròn (O), trên đó có điểm A cố định. Kẻ tia Ax là tiếp tuyến của đường tròn. Lấy điểm M trên Ax, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn (O). Gọi I là trung điểm của MA và K là giao điểm thứ hai của BI với đường tròn (O). Tia MK cắt đường tròn (O) tại điểm C (khác điểm K).
- a) Chứng minh rằng  $IA^2 = IK \cdot IB$ .
- b) Chứng minh rằng tam giác MIK đồng dạng với tam giác BIM.
- c) Chứng minh BC song song với AM.
- d) Xác định vị trí của điểm M trên tia Ax sao cho AK vuông góc với MB.
5. Cho đoạn thẳng  $AD = a$ . Gọi I là trung điểm của AD, kẻ tia Ix vuông góc với AD. Một đường tròn (O) bất kì bán kính R ( $R > \frac{a}{2}$ ) tiếp xúc với AD tại A cắt Ix tại B và C (B nằm giữa I và C).
- a) Chứng minh rằng  $IC \cdot IB$  không đổi khi đường tròn thay đổi.
- b) Chứng minh B là trực tâm của tam giác ACD. Có nhận xét gì về trực tâm của tam giác ABC khi đường tròn (O) thay đổi ?
- c) Gọi D' là điểm đối xứng của D qua đường thẳng AC. Chứng minh tứ giác ABCD' nội tiếp.
- d) Giả sử  $\cos \widehat{CAI} = \frac{1}{2}$ . Chứng minh tứ giác ADCD' là hình thoi.
6. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của DE, K là giao điểm của BC và AE. Chứng minh rằng:
- a) HA là tia phân giác của góc BHC.
- b)  $AH \cdot AK = AD \cdot AE$ .
- c)  $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}$ .
- d)  $BD \cdot CE = BE \cdot CD$ .
- e)  $\frac{1}{AE} + \frac{1}{KE} = \frac{2}{DE}$ .

## Chuyên đề 11

# CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP VÀ NHIỀU ĐIỂM CÙNG NẪM TRÊN ĐƯỜNG TRÒN

### A. Kiến thức cần nhớ

#### 1. Tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).
- Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm là tứ giác nội tiếp.
- Tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng  $180^0$  là tứ giác nội tiếp.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc bằng nhau là tứ giác nội tiếp.

#### 2. Chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn

- Lợi dụng các tam giác vuông có cạnh huyền chung.
- Chứng minh các đỉnh của một đa giác cùng nằm trên một đường tròn.
- Sử dụng cung chứa góc.
- Chứng minh các tứ giác nội tiếp.

### B. Một số ví dụ

**Ví dụ 5.** Cho đường tròn tâm O đường kính AD. Kẻ hai dây cung AC và DB cắt nhau tại điểm E nằm trong đường tròn. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

- Các tứ giác ABEH, DCEH nội tiếp được.
- E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.
- Năm điểm B, C, I, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

**Giải** (h.6)

a)  $\widehat{ABD} = 90^0$ ,  $\widehat{ACD} = 90^0$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD).

$EH \perp AD \Rightarrow \widehat{EHA} = \widehat{EHD} = 90^0$ .

Suy ra:  $\widehat{ABD} + \widehat{EHA} = 180^0$ , mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác ABEH nội tiếp.

Ta cũng có  $\widehat{ACD} + \widehat{EHD} = 180^\circ$  mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác DCEH nội tiếp.

b) Xét đường tròn (O) ta có

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBD}; \widehat{ECB} = \widehat{EDA}.$$

Mặt khác:  $\widehat{CAD} = \widehat{EBH}$  (tứ giác ABEH nội tiếp),  $\widehat{EDA} = \widehat{ECH}$  (tứ giác DCEH nội tiếp).

Từ đó suy ra  $\widehat{EBH} = \widehat{EBC}; \widehat{ECB} = \widehat{ECH}$ ,

hay E là giao điểm hai đường phân giác của  $\Delta BCH$ . Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp  $\Delta BCH$ .

c) Tứ giác ABEH nội tiếp nên  $\widehat{BHE} = \widehat{BAE} \Rightarrow \widehat{BHC} = 2.\widehat{BAC}$ .

Xét đường tròn (O), ta có  $\widehat{BOC} = 2.\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BOC}$  mà H và O nằm cùng phía đối với BC, cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau suy ra BCHO nội tiếp. (1)

$\Delta ECD$  vuông tại C có CI là đường trung tuyến suy ra  $IC = ID = IE \Rightarrow \widehat{CIE} = 2.\widehat{CDE} \Rightarrow \widehat{CIB} = \widehat{COB}$  mà I và O nằm cùng phía với BC cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau suy ra BCIO nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

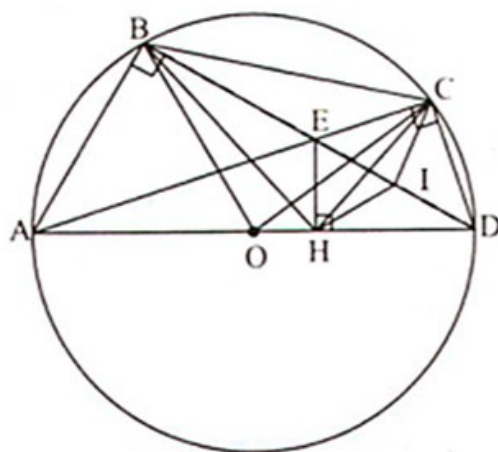
**Nhận xét.** Để chứng minh năm điểm cùng nằm trên một đường tròn, bạn nên chứng minh hai tứ giác nội tiếp. Chẳng hạn để chứng minh B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn, ta chứng minh BCHO, BCIO nội tiếp vì khi đó H và I sẽ cùng thuộc đường tròn ngoại tiếp của tam giác BCO.

**Ví dụ 6.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn ( $CD > AB$ ). P là điểm chính giữa của cung AB (cung không chứa điểm C, D). Hai dây PC, PD lần lượt cắt dây AB tại E và F. Các dây AD, PC kéo dài cắt nhau tại I. Các dây BC, PD kéo dài cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

- Tứ giác CDFE nội tiếp được.
- Tứ giác IKCD nội tiếp được.
- IK song song với AB.

**Giải** (h.7)

$$a) \text{ Ta có: } \widehat{F}_1 = \frac{sd\widehat{PB} + sd\widehat{AD}}{2}; \widehat{C}_1 = \frac{sd\widehat{PAD}}{2} = \frac{sd\widehat{PA} + sd\widehat{AD}}{2}$$



Hình 6

mà  $\widehat{PA} = \widehat{PB} \Rightarrow \widehat{F}_1 = \widehat{C}_1$ .

Mặt khác  $\widehat{F}_1 + \widehat{F}_2 = 180^\circ$  nên  $\widehat{F}_2 + \widehat{C}_1 = 180^\circ$  suy ra tứ giác CDFE nội tiếp được.

**Nhận xét.** Khi chứng minh tứ giác nội tiếp không phải trường hợp có góc vuông, bạn nên chứng minh một góc trong của tứ giác bằng góc ngoài kề với góc ở đỉnh đối diện.

b) Xét đường tròn (O) có:

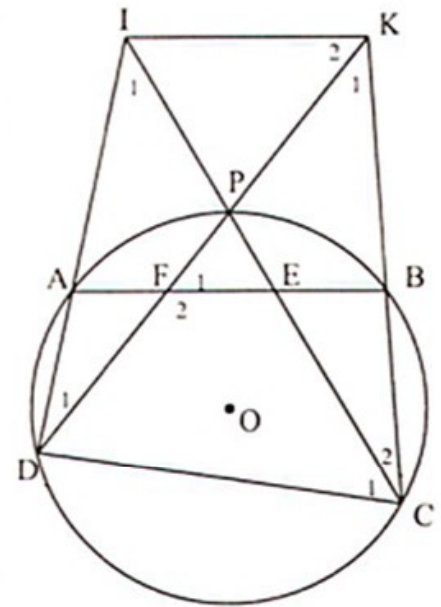
$$\widehat{C}_2 = \frac{sdPB}{2} ; \widehat{D}_1 = \frac{sdAP}{2}$$

mà  $\widehat{PA} = \widehat{PB} \Rightarrow \widehat{C}_2 = \widehat{D}_1$ .

Xét tứ giác CDIK có  $\widehat{C}_2 = \widehat{D}_1$  mà C, D là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn IK dưới một góc bằng nhau nên tứ giác CDIK nội tiếp.

**Nhận xét.** Bạn cũng có thể chứng minh  $\widehat{I}_1 = \widehat{K}_1$ .

Hình 7



c) Tứ giác CDIK nội tiếp nên  $\widehat{C}_1 = \widehat{K}_2$  (góc nội tiếp cùng chắn cung ID) mà  $\widehat{C}_1 = \widehat{F}_1 \Rightarrow \widehat{K}_2 = \widehat{F}_1 \Rightarrow IK \parallel AB$ .

**Nhận xét.** Khi đã chứng minh được tứ giác nội tiếp, bạn có thể vận dụng được các góc nội tiếp của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

**Ví dụ 7.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và hai điểm C, D thuộc nửa đường tròn sao cho C là điểm chính giữa của cung AM và góc COD bằng  $90^\circ$ . Gọi E là giao điểm của AM và OC; F là giao điểm của BM và OD.

- Tứ giác OEMF là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh D là điểm chính giữa của cung MB.
- Một đường thẳng d tiếp xúc với nửa đường tròn tại M cắt tia OC, OD lần lượt tại I, K. Chứng minh các tứ giác OBKM, OAIM nội tiếp được.
- Giả sử tia AM cắt tia BD tại S. Xác định vị trí của C và D sao cho năm điểm M, O, B, K, S cùng thuộc một đường tròn.

**Giải** (h.8) a)  $\Delta AOM$  cân ( $OA = OM$ ) có OE là tia phân giác của  $\widehat{AOM}$  nên OE cũng là đường cao suy ra  $OE \perp AM$ . Ta lại có  $\widehat{EMF} = 90^\circ$ ,  $\widehat{EOF} = 90^\circ$  nên tứ giác MEOF là hình chữ nhật.

b) Ta có  $\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{O}_1 + \widehat{O}_4 = 90^\circ$ ,

mà  $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \Rightarrow \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 \Rightarrow \widehat{MD} = \widehat{DB}$ .

c)  $\Delta OAI$  và  $\Delta OMI$  có  $OA = OM$ ,

$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ ,  $OI$  chung

nên  $\Delta OAI = \Delta OMI$  (c.g.c)

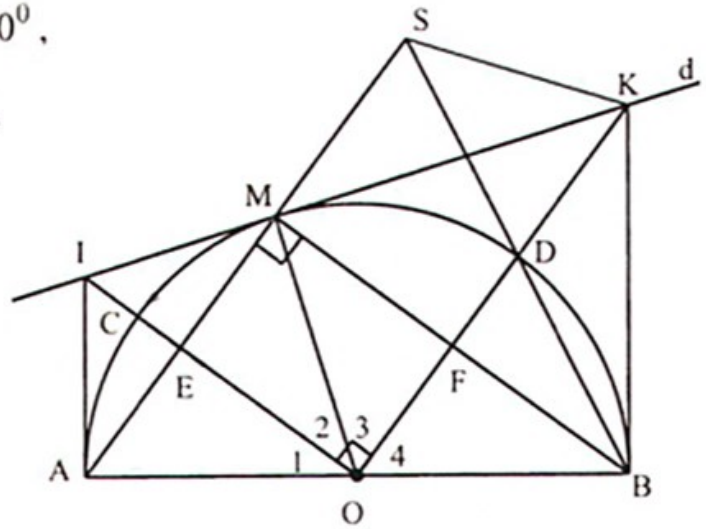
$\Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OMI}$ , mà  $\widehat{OMI} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{OAI} + \widehat{OMI} = 180^\circ$ .

Vậy tứ giác  $OAIM$  là tứ giác nội tiếp.

Tương tự ta có tứ giác  $BOMK$  là tứ giác nội tiếp.

d) Năm điểm  $M, O, B, K, S$  cùng thuộc đường tròn khi và chỉ khi tứ giác  $MBKS$  nội tiếp



Hình 8

$$\Leftrightarrow \widehat{SMK} = \widehat{SBK} \Leftrightarrow \widehat{IMA} = \widehat{SBK} \Leftrightarrow \frac{sd\widehat{AM}}{2} = \frac{sd\widehat{BD}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{AM} = \widehat{BD} = \widehat{MD} \Leftrightarrow sd\widehat{AC} = 30^\circ; sd\widehat{BD} = 60^\circ.$$

**Ví dụ 8.** Cho đường tròn tâm  $O$  và điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  với đường tròn ( $B, C$  là tiếp điểm). Trên cung nhỏ  $BC$  lấy một điểm  $M$  rồi kẻ đường vuông góc  $MI, MH, MK$  xuống các cạnh  $BC, CA, AB$ . Gọi giao điểm của  $BM, IK$  là  $P$ ; giao điểm của  $CM, IH$  là  $Q$ .

a) Chứng minh rằng các tứ giác  $BIMK, CIMH$  nội tiếp được;

b) Chứng minh rằng  $MI^2 = MH \cdot MK$ ;

c) Chứng minh tứ giác  $IPMQ$  nội tiếp rồi suy ra  $PQ \perp MI$ ;

d) Nếu  $KI = KB$ , chứng minh  $IH = IC$ .

**Giải** (h.9)

a) \*  $\widehat{BIM} = \widehat{BKM} = 90^\circ$  suy ra tứ giác  $BIMK$  nội tiếp.

\*  $\widehat{CIM} = \widehat{CHM} = 90^\circ$  suy ra tứ giác  $CIMH$  nội tiếp.

b) Tứ giác  $BIMK$  nội tiếp nên  $\widehat{IKM} = \widehat{IBM}; \widehat{KIM} = \widehat{KBM}$ . (1)

Tứ giác  $CIMH$  nội tiếp nên  $\widehat{ICM} = \widehat{IHM}; \widehat{MIH} = \widehat{MCH}$ . (2)

Xét đường tròn tâm  $(O)$  có:  $\widehat{KBM} = \widehat{BCM}; \widehat{MBI} = \widehat{MCH}$ . (3)



Từ (1), (2), (3) suy ra:  $\widehat{KIM} = \widehat{IHM}$ ;  $\widehat{MKI} = \widehat{MIH}$

do đó  $\Delta MIK \sim \Delta MHI$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MK}{MI} = \frac{MI}{MH} \Rightarrow MI^2 = MK.MH.$$

c) \* Ta có  $\widehat{PMQ} + \widehat{PIQ} = \widehat{BMC} + \widehat{PIM} + \widehat{QIM}$   
 $= \widehat{BMC} + \widehat{MCI} + \widehat{MBC} = 180^\circ$

hay  $\widehat{PMQ} + \widehat{PIQ} = 180^\circ$

suy ra tứ giác MPIQ nội tiếp.

\* Từ đó ta có  $\widehat{MPQ} = \widehat{MIQ} \Rightarrow \widehat{MPQ} = \widehat{MBC}$

$\Rightarrow PQ \parallel BC$  mà  $MI \perp BC$  nên  $MI \perp PQ$ .

d) \* Từ  $IK = KB \Rightarrow \widehat{KBI} = \widehat{KIB} \Rightarrow \widehat{ICH} = \widehat{KIB}$ . (4)

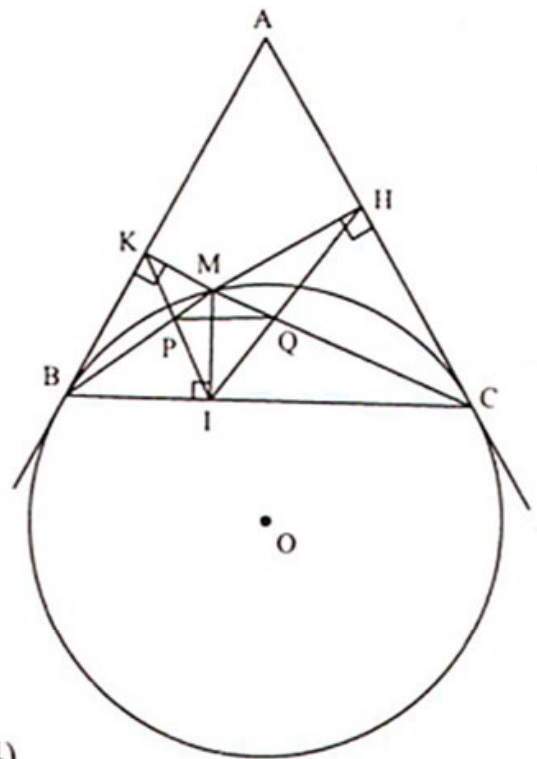
\* Mặt khác  $PQ \parallel BC \Rightarrow \widehat{KIB} = \widehat{IPQ}$ . (5)

\* Tứ giác MPIQ nội tiếp nên  $\widehat{IPQ} = \widehat{IMQ}$ . (6)

\* Tứ giác IMHC nội tiếp nên  $\widehat{IMQ} = \widehat{IHC}$ . (7)

Từ (4), (5), (6), (7) suy ra  $\widehat{ICH} = \widehat{IHC}$ . Vậy  $\Delta IHC$  cân tại I nên  $IC = IH$ .

*Nhận xét.* Từ câu b), với kỹ thuật của của chuyên đề 16, bạn có thể giải được câu sau: Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để tích  $MI.MK.MH$  đạt giá trị lớn nhất.



Hình 9

### C. Bài tập

7. Cho đường tròn  $(O; R)$  có dây  $AB < 2R$ . Trên tia  $AB$  lấy điểm  $C$  sao cho  $AC > AB$ . Từ  $C$  kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  tại  $P, K$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ .
  - a) Chứng minh rằng tứ giác  $CPOK$  nội tiếp.
  - b) Chứng minh rằng  $C, P, I, O, K$  cùng nằm trên một đường tròn.
  - c) Giả sử  $PA$  song song với  $CK$ . Chứng minh rằng tia đối của tia  $BK$  là tia phân giác của góc  $CBP$ .
8. Cho đường tròn  $(O; R)$  có hai đường kính  $AB, CD$  vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng  $AB$  lấy điểm  $M$  (khác điểm  $O$ ). Đường thẳng  $CM$  cắt đường tròn

(O; R) tại điểm thứ hai N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N với đường tròn ở điểm P. Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác OMNP nội tiếp được.
  - b) Năm điểm O, M, N, P, D cùng nằm trên một đường tròn.
  - c) Tích CM.CN không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
  - d) Khi M di động trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên một đoạn thẳng cố định.
9. Cho hình thang ABCD ( $AD \parallel BC$ ) nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại P. Chứng minh rằng năm điểm A, O, I, B, P cùng nằm trên một đường tròn.
10. Cho tam giác vuông ABC ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ), đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên các cạnh AB, AC. Tia Ex vuông góc với BE và tia Cy vuông góc với BC cắt nhau tại điểm F. Chứng minh rằng năm điểm B, D, E, C, F cùng nằm trên một đường tròn.
11. Cho  $\Delta ABC$  ( $AC > AB$ ,  $\widehat{BAC} > 90^\circ$ ). Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Các đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểm thứ hai E; tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F.
- a) Chứng minh B, C, D thẳng hàng.
  - b) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp.
  - c) Chứng minh ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy.
  - d) Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Hãy so sánh DH và DE.
12. Cho tam giác ABC vuông tại A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn (O) đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm thứ hai là F, G. Chứng minh rằng :
- a) Các tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp.
  - b)  $AD \cdot AB = AG \cdot AE$ .
  - c)  $AC \parallel FG$ .
  - d) AC, DE và BF đồng quy.

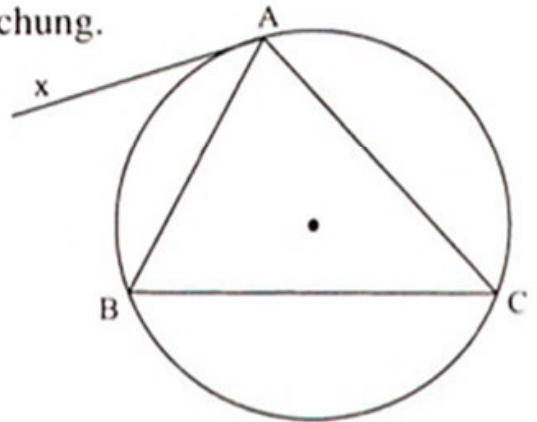
## Chuyên đề 12

# CHỨNG MINH QUAN HỆ TIẾP XÚC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN HOẶC HAI ĐƯỜNG TRÒN

### A. Kiến thức cần nhớ

#### 1. Các cách chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn

- Đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung.
- Khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn.
- Đường thẳng vuông góc với bán kính tại điểm đầu của bán kính.
- Cho  $\Delta ABC$ , nếu có tia  $Ax$  nằm khác phía với  $C$  bờ  $AB$  mà  $\widehat{BAx} = \widehat{BCA}$  thì tia  $Ax$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  (h.10).



Hình 10

#### 2. Các cách chứng minh hai đường tròn tiếp xúc nhau

- Nếu đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn bằng tổng của hai bán kính thì hai đường tròn tiếp xúc ngoài.
- Nếu đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn bằng hiệu của hai bán kính thì hai đường tròn tiếp xúc trong.
- Nếu hai đường tròn cùng tiếp xúc với một đường thẳng tại một điểm thì hai đường tròn tiếp xúc nhau.

### B. Một số ví dụ

**Ví dụ 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AH$  là đường cao. Vẽ hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  có đường kính lần lượt là  $BH$  và  $CH$ . Các đường tròn trên cắt  $AB$ ,  $AC$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ . Chứng minh rằng:

- Tứ giác  $AEHF$  là hình chữ nhật.
- $AE \cdot AB = AC \cdot AF$ .
- $EF$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ .

**Giải (h.11)**

a) Ta có  $\widehat{BEH} = 90^0$ ;  $\widehat{HFC} = 90^0$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra  $\widehat{HEA} = 90^0$ ;  $\widehat{HFA} = 90^0$  mà  $\widehat{EAF} = 90^0$  nên tứ giác AEHF là hình chữ nhật.

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$AH^2 = AB.AE$ ;  $AH^2 = AC.AF$ , từ đó suy ra  $AB.AE = AC.AF$ .

c) Gọi I là giao điểm của AH và EF, thì ta có  $IE = IH$ .

Xét  $\triangle IEO$  và  $\triangle IHO$ , ta có  $IE = IH$ ;  $IO$  chung;  $OH = OE$  suy ra  $\triangle IEO = \triangle IHO$  (c.c.c)  $\Rightarrow \widehat{IEO} = \widehat{IHO} \Rightarrow \widehat{IEO} = 90^0$  mà  $OE$  là bán kính đường tròn (O) nên  $IE$  là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Tương tự như vậy ta có  $IF$  là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Từ đó suy ra  $EF$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

**Nhận xét.** Khi chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn, bạn có thể dựa vào một tiếp tuyến đã có. Chẳng hạn trong bài có thể suy ra  $AH$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, vậy muốn chứng minh  $EF$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, bạn nên chứng minh  $\widehat{IEO} = 90^0$  bằng cách ghép vào hai tam giác bằng nhau.

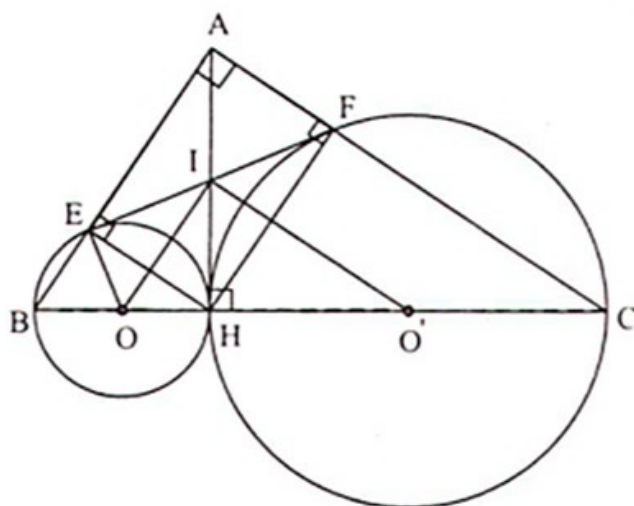
**Ví dụ 10.** Cho đường tròn (O; R) có dây  $AB < 2R$ . Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và C là một điểm thuộc đoạn thẳng AB (C khác A và B). Tia MC cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng:

- $MA^2 = MC.MD$ .
- $MB.BD = BC.MD$ .
- $MA$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.
- Tổng bán kính của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và BCD không đổi khi C di động.

**Giải (h.12)**

a) Ta có  $\widehat{MA} = \widehat{MB} \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MDA}$ .

$\triangle MAC$  và  $\triangle MDA$  có  $\widehat{AMD}$  chung,  $\widehat{MAB} = \widehat{MDA}$



Hình 11

$$\Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MDA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD.$$

b) Tương tự, ta cũng có  $\Delta MBC \sim \Delta MDB \text{ (g.g)}$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{BC}{DB} \Rightarrow MB.BD = MD.BC.$$

c) Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm M, vẽ tia Ax là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ACD \Rightarrow \widehat{CAx} = \widehat{CDA}$ .

$$\text{Mà } \widehat{AM} = \widehat{MB} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{MDA}$$

$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{CDA} \Rightarrow \widehat{CAx} = \widehat{CAM}$  mà AM, Ax nằm cùng nửa mặt phẳng bờ AC nên hai tia AM, Ax trùng nhau.

Vậy AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ACD$ .

d) Chứng minh tương tự, ta có BM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Gọi  $O_1, O_2$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ACD, \Delta BCD$ . Suy ra  $O_1A \perp AM, O_2B \perp BM$  (tính chất tiếp tuyến).

Kẻ MN là đường kính của đường tròn (O) thì  $AN \perp AM; BN \perp BM$

$\Rightarrow A, O_1, N$  thẳng hàng,  $B, O_2, N$  thẳng hàng.

Ta có  $\Delta AO_1C$  cân tại  $O_1 \Rightarrow \widehat{O_1AC} = \widehat{O_1CA}$ ,

$$\Delta NAB \text{ cân tại } N \Rightarrow \widehat{NAB} = \widehat{NBA}$$

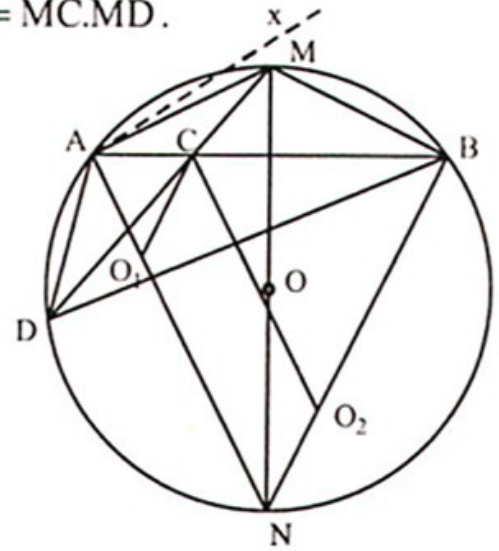
suy ra  $\widehat{O_1CA} = \widehat{NBA} \Rightarrow O_1C \parallel BN$ .

Tương tự như vậy, ta có  $O_2C \parallel AN$  từ đó suy ra  $CO_1NO_2$  là hình bình hành do đó  $CO_2 = O_1N$ .

Tổng hai bán kính của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ACD$  và  $\Delta BCD$  là:

$$O_1A + O_2C = O_1A + O_1N = AN \text{ không đổi.}$$

**Nhận xét.** Qua bài này, bạn có thể nhận biết được một tia là tiếp tuyến của đường tròn thông qua bài sau: Cho tam giác ACD. Trên tia đối của tia CD lấy điểm M. Tia AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD nếu thoả mãn một trong hai điều kiện sau:



Hình 12

- a) Góc ADC bằng góc MAC;  
 b)  $MA^2 = MC.MD$ .

**Ví dụ 11.** Hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; r)$  tiếp xúc ngoài tại  $C$  ( $R > r$ ) gọi  $AC$  và  $BC$  là hai đường kính đi qua  $C$  của đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ .  $DE$  là dây cung của đường tròn  $(O)$  vuông góc với  $AB$  tại trung điểm  $M$  của  $AB$ . Tia  $DC$  cắt đường tròn  $(O')$  tại điểm thứ hai là  $F$ .

- a) Tứ giác  $ADBE$  là hình gì? Vì sao?  
 b) Chứng minh ba điểm  $B, F, E$  thẳng hàng.  
 c)  $DB$  cắt đường tròn  $(O')$  tại điểm thứ hai là  $G$ . Chứng minh  $DF, EG$  và  $AB$  đồng quy.  
 d) Chứng minh  $MF$  là tiếp tuyến của  $(O')$ .

**Giải** (h.13)

a) Tứ giác  $ADBE$  là hình thoi vì  $AM = MB; MD = ME$  và  $DE \perp AB$ .

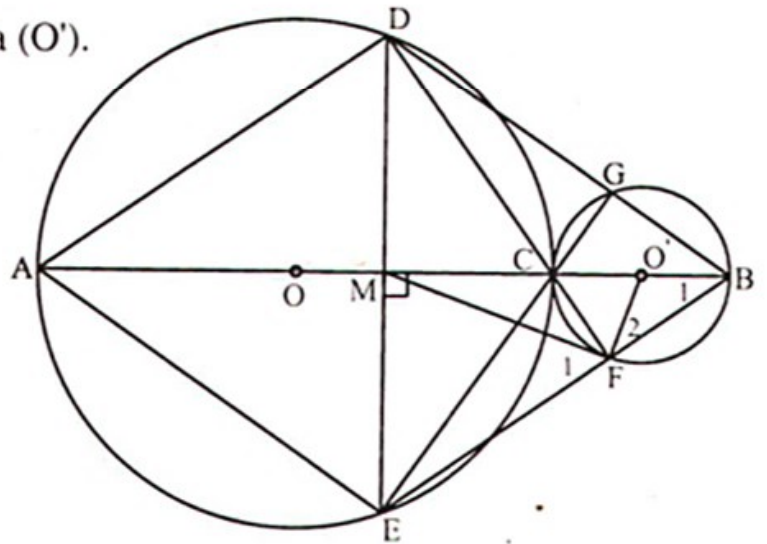
b) Ta có  $BE \parallel DA$ . Nối  $BF$  ta có  $\widehat{ADF} = \widehat{BFD} = 90^\circ \Rightarrow BF \parallel DA$ . Như vậy  $BE \parallel DA$  và  $BF \parallel DA$  mà qua  $B$  chỉ có duy nhất một đường thẳng song song với  $DA$  do đó ba điểm  $B, F, E$  phải thẳng hàng.

c) Ta có  $CG$  vuông góc với  $DB$ , mặt khác  $EC$  vuông góc với  $DB$ . Nhưng qua  $C$  chỉ tồn tại duy nhất một đường vuông góc với  $DB$  cho nên  $E, C, G$  phải thẳng hàng và  $DF, EG, AB$  phải đồng quy tại điểm  $C$ , chính là trực tâm của tam giác  $EDB$ .

d) Nhận thấy  $\widehat{MEF} = \widehat{F}_1$  và  $\widehat{O'BF} = \widehat{F}_2$  mà  $\widehat{MEF} + \widehat{O'BF} = 90^\circ$  nên  $\widehat{F}_1 + \widehat{F}_2 = 90^\circ$ , suy ra  $\widehat{MFO'} = 90^\circ$ . Vậy  $MF$  là tia tiếp tuyến của đường tròn tâm  $O'$ .

**Ví dụ 12.** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$  trên đó có một điểm  $M$ . Trên đường kính  $AB$  lấy một điểm  $C$  sao cho  $AC < CB$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AB$  có chứa điểm  $M$ , người ta kẻ các tia  $Ax, By$  vuông góc với  $AB$ ; đường thẳng qua  $M$  vuông góc với  $MC$  cắt  $Ax$  tại  $P$ ; đường thẳng qua  $C$  vuông góc với  $CP$  cắt  $By$  tại  $Q$ . Gọi  $D$  là giao điểm của  $CP$  và  $AM$ ;  $E$  là giao điểm của  $CQ$  và  $BM$ .

- a) Chứng minh rằng các tứ giác  $ACMP, CDME$  nội tiếp được.  
 b) Chứng minh rằng hai đường thẳng  $AB, DE$  song song.



Hình 13

- c) Chứng minh rằng ba điểm P, M, Q thẳng hàng.  
 d) Ngoài điểm M ra, các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMP, EMQ còn điếm chung nào nữa không? Tại sao?

**Giải** (h.14)

a) Tứ giác ACMP có  $\widehat{A} = \widehat{M} = 90^\circ$  nên nội tiếp được.

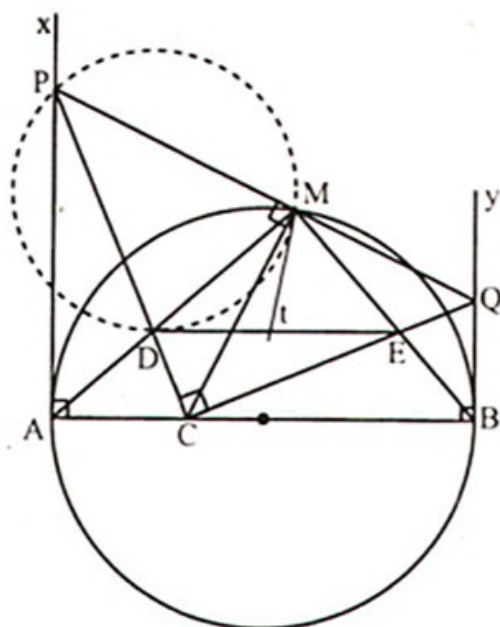
Tứ giác CDME có  $\widehat{C} = \widehat{M} = 90^\circ$  nên nội tiếp được.

b) Do các tứ giác ACMP và CDME nội tiếp được nên  $\widehat{MAC} = \widehat{MPC}$ ,  $\widehat{MDE} = \widehat{MCE}$  mà  $\widehat{MPC} = \widehat{MCE}$  (vì cùng phụ với góc  $\widehat{MCP}$ ) nên  $\widehat{MAC} = \widehat{MDE}$ . Vậy AB song song với DE.

c) Do  $\widehat{MBQ} = \widehat{MAC}$  (vì cùng phụ  $\widehat{ABM}$ ) và  $\widehat{MAC} = \widehat{MDE} = \widehat{MCQ}$  nên  $\widehat{MCQ} = \widehat{MBQ}$ . Suy ra tứ giác CMQB nội tiếp do đó  $\widehat{CMQ} = 90^\circ$ . Vậy P, M, Q thẳng hàng.

d) Trên nửa mặt phẳng bờ MC không chứa điểm D kẻ tia tiếp tuyến Mt của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMP suy ra  $\widehat{AMt} = \widehat{MPD}$  mà  $\widehat{MQC}$  phụ với  $\widehat{MPC}$  nên  $\widehat{BMt} = \widehat{MQC}$ . Suy ra Mt tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác EMQ. Do đó hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMP và EMQ tiếp xúc nhau. Vậy có duy nhất một điểm M là điểm chung của hai đường tròn nói trên.

**Nhận xét.** Bạn có thể chứng minh được DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMP, EMQ.



Hình 14

### C. Bài tập

13. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R). Từ A kẻ đường thẳng d không đi qua tâm O, cắt đường tròn (O; R) tại B và C (B nằm giữa A và C). Các tiếp tuyến với (O; R) tại B và C cắt nhau tại D. Từ D kẻ DH vuông góc với AO (H nằm trên AO) cắt cung nhỏ BC tại M. Gọi E là giao điểm của DO và BC.
- Chứng minh DHOC là tứ giác nội tiếp.
  - Chứng minh  $OH.OA = OE.OD$ .
  - Chứng minh AM là tiếp tuyến của (O; R).

14. Cho hai đường tròn  $(O_1)$  và  $(O_2)$  tiếp xúc ngoài tại A. Một đường thẳng d tiếp xúc với  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  lần lượt tại B và C.
- Chứng minh tam giác ABC vuông.
  - Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.
  - Chứng minh góc  $O_1MO_2$  bằng  $90^\circ$ .
  - Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MO_1O_2$  tiếp xúc với đường thẳng d.
15. Cho đường tròn (O) đường kính  $AB = 2R$  và một điểm C trên đường tròn (C không trùng với A và B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C, kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC; P là giao điểm của AC, BM. Tia BC cắt các tia AM, Ax lần lượt tại N và Q.
- Chứng minh  $\triangle ABN$  cân;
  - Tứ giác APNQ là hình gì? Tại sao?
  - Gọi K là điểm chính giữa của cung AB không chứa C. Hỏi có thể xảy ra ba điểm Q, M, K thẳng hàng được không? Tại sao?
  - Xác định vị trí của điểm C để đường tròn ngoại tiếp  $\triangle MNQ$  tiếp xúc với đường tròn (O).
16. Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  cắt nhau tại A và B ( $O, O'$  thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) và  $(O')$  tương ứng tại C và D (A nằm giữa C và D). Các tiếp tuyến tại C và D của hai đường tròn cắt nhau tại K. Nối KB cắt CD tại I. Kẻ Ix song song với KD cắt BD tại E.
- Chứng minh rằng  $\triangle BOO'$  đồng dạng với  $\triangle BCD$ .
  - Chứng minh tứ giác BCKD nội tiếp.
  - Chứng minh AE là tiếp tuyến của đường tròn  $(O; R)$ .
17. Cho tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AB. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho  $CD = AC$ .
- Chứng minh tam giác ABD cân.
  - Đường thẳng vuông góc với AC tại A cắt đường tròn (O) tại E. Trên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho  $EF = AE$ . Chứng minh rằng ba điểm D, B, F thẳng hàng.
  - Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADF$  tiếp xúc với đường tròn (O).



18. Cho đường tròn (O) đường kính AB,  $d_1, d_2$ , là các đường thẳng lần lượt qua A, B và cùng vuông góc với đường thẳng AB. Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc  $d_1, d_2$ , sao cho  $\widehat{MON} = 90^\circ$ .

a) Chứng minh rằng  $AM \cdot BN = \frac{AB^2}{4}$ .

b) Chứng minh rằng đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

## Chuyên đề 13 CHỨNG MINH ĐIỂM CỐ ĐỊNH

### A. Kiến thức cần nhớ

- Trước hết xác định ba loại yếu tố: *cố định, không đổi và thay đổi*. Phán đoán điểm cố định.
- Để dự đoán điểm cố định, ta vẽ hai vị trí của đường thẳng (thường chọn vị trí đặc biệt) và tìm giao điểm S của chúng.
- Dựa vào giả thiết để tìm mối quan hệ giữa điểm cố định (dự đoán) và các yếu tố khác của đề bài.
- Trình bày lời giải, chứng tỏ S là điểm cố định (là giao điểm của hai đường thẳng cố định hoặc nằm trên một tia cố định và cách gốc một khoảng không đổi,...).

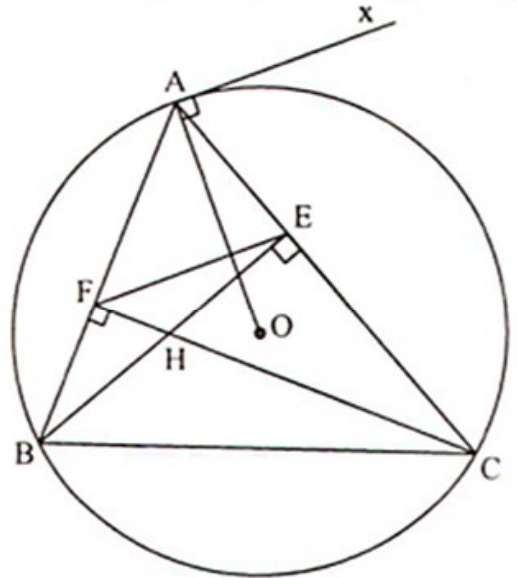
### B. Một số ví dụ

**Ví dụ 13.** Cho đường tròn (O; R) có dây BC < 2R cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC. Kẻ BE và CF là đường cao của  $\Delta ABC$  cắt nhau tại H. Chứng minh rằng khi A di động thì đường thẳng qua A và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định.

**Giải** (h.15). Ta có tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC  $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AEF}$ .

Kẻ Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O; R)

thì  $Ax \perp AO$  và  $\widehat{ABC} = \widehat{CAx} \Rightarrow \widehat{CAx} = \widehat{AEF} \Rightarrow Ax \parallel EF \Rightarrow EF \perp AO$ .



Hình 15

Vậy đường thẳng qua A vuông góc với EF luôn đi qua điểm O cố định.

**Nhận xét.** Thực chất bài này bắt nguồn từ bài toán chứng minh  $EF \perp AO$ . Nếu gọi M là trung điểm của BC thì ta có kết quả quen thuộc là  $AH \parallel OM$  và  $AH = 2.OM$ . Từ đó ta có câu hỏi hay và khó sau đây:

- Chứng minh rằng khi A di động thì đường thẳng qua tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$  và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định.
- Chứng minh rằng khi A di động thì đường thẳng qua H và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định.

**Ví dụ 14.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và một đường thẳng  $d$  nằm ngoài đường tròn. I là một điểm di động trên  $d$ . Đường tròn đường kính IO cắt đường tròn  $(O; R)$  tại hai điểm M, N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

**Giải** (h.16)

Đường tròn đường kính IO, cắt đường tròn  $(O; R)$  tại M, N  $\Rightarrow \widehat{IMO} = \widehat{INO} = 90^\circ \Rightarrow$  IM, IN là tiếp tuyến của đường tròn  $(O; R)$ . Gọi E là giao của IO và MN thì IE là đường phân giác của  $\widehat{MIN}$  suy ra IE cũng là đường cao của tam giác cân MIN  $\Rightarrow IE \perp MN$ .

$\triangle OMI$  có  $\widehat{OMI} = 90^\circ$ ;  $ME \perp OI$  nên  $OM^2 = OE.OI$ . (1)

Kẻ  $OA \perp d$  tại A, gọi K là giao điểm của OA và MN thì  $\triangle OEK \sim \triangle OAI$  (g.g)

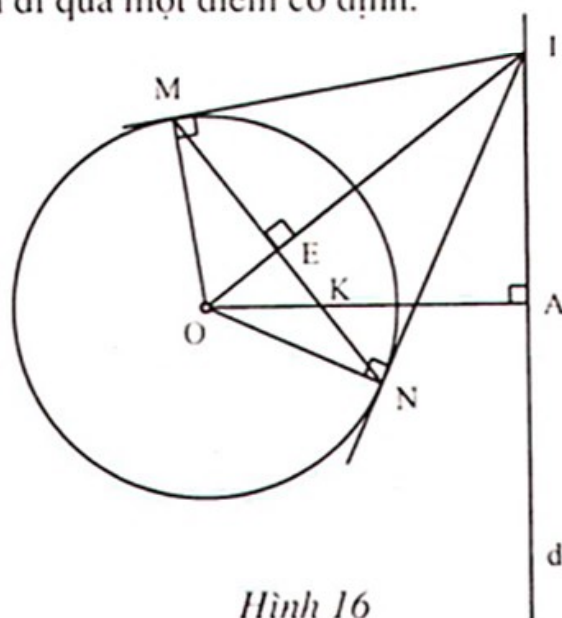
$\Rightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{OK}{OI} \Rightarrow OA.OK = OE.OI$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra:  $OK.OA = OM^2 = R^2$ .

Từ đó suy ra  $OK = \frac{R^2}{OA}$  mà OA không đổi nên OK không đổi, do đó K là điểm cố định phải tìm.

**Ví dụ 15.** Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn  $(O)$  thay đổi nhưng luôn qua B và C. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn. Đường thẳng MN cắt AO và AC lần lượt tại H và K.

a) Chứng minh M, N di động trên một đường tròn cố định.



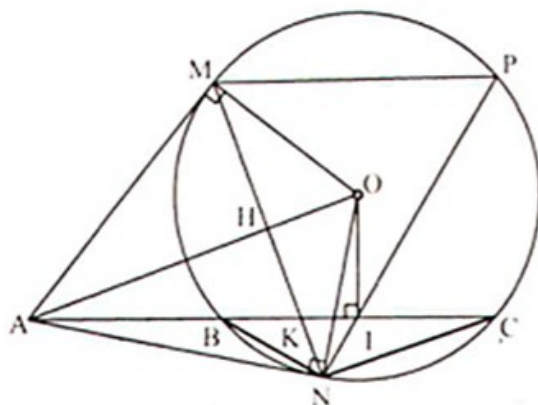
Hình 16

- b) Gọi I là trung điểm của BC. NI cắt đường tròn (O) tại P. Chứng minh  $MP \parallel BC$ .
- c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK luôn đi qua hai điểm cố định.

**Giải** (h.17)

a) Vì AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên  $\widehat{ANB} = \widehat{BCN}$  mà  $\widehat{CAN}$  chung nên  $\Delta ANB \sim \Delta ACN$  (g.g) suy ra  $\frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AN}$

$\Rightarrow AN^2 = AB.AC$  mà  $AM = AN$  (tính chất tiếp tuyến). Suy ra M, N nằm trên đường tròn tâm A bán kính  $\sqrt{AB.AC}$  cố định.



Hình 17

b)  $\widehat{ANO} = 90^0$ ;  $\widehat{AIO} = 90^0$  nên tứ giác AOIN nội tiếp đường tròn đường kính AO, suy ra  $\widehat{AON} = \widehat{AIN}$ .

Mặt khác  $\widehat{AON} = \frac{1}{2}\widehat{MON}$ ;  $\widehat{MPN} = \frac{1}{2}\widehat{MON}$  nên  $\widehat{AIN} = \widehat{MPN}$  suy ra  $MP \parallel BC$ .

c) Theo câu a), ta có  $AN^2 = AB.AC$ . (1)

Mặt khác  $\Delta ANO$  vuông tại N có  $NH \perp AO$  nên  $AN^2 = AH.AO$ . (2)

$\Delta AHK \sim \Delta AIO$  (vì  $\widehat{OAI}$  chung,  $\widehat{AHK} = \widehat{AIO} = 90^0$ )

$$\Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AH.AO = AI.AK. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra  $AB.AC = AI.AK \Rightarrow AK = \frac{AB.AC}{AI}$  mà AB, AC, AI cố định

$\Rightarrow AK$  không đổi  $\Rightarrow K$  cố định.

Tứ giác OIKH nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp  $\Delta OHK$  luôn đi qua K và I cố định.

**Nhận xét.** Nhiều bài toán chứng minh điểm cố định được xuất phát từ những đẳng thức tích. Vì vậy khi làm dạng toán này, ngoài việc phán đoán điểm cố định bạn cần liên hệ tới những kết quả mà bạn có thể làm được.

Chẳng hạn ở ví dụ 14, bạn phán đoán điểm K cố định thì bạn cần liên hệ tới kết quả đơn giản là:  $OK.OA = OE.OI$  và  $OE.OI = R^2$ . Ở ví dụ 15 bạn dễ dàng có điểm I cố định, bạn phán đoán điểm tiếp theo là K cố định thì bạn cần liên hệ tới kết quả đơn giản là:  $AK.AI = AH.AO$ ;  $AN^2 = AH.AO$  và  $AN^2 = AB.AC$ . Từ đó ta có cách chứng minh trên.

**Ví dụ 16.** Cho tam giác ABC vuông tại C và  $BC < CA$ . Gọi I là điểm trên AB và  $IB < IA$ . Kẻ đường thẳng d đi qua I và vuông góc với AB. Gọi giao điểm của d với AC, BC lần lượt là F và E. Gọi M là điểm đối xứng với B qua I.

a) Chứng minh rằng  $\triangle IME$  đồng dạng với  $\triangle IFA$  và  $IE \cdot IF = IA \cdot IB$ .

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF cắt AE tại N. Chứng minh rằng F, N, B thẳng hàng.

c) Cho AB cố định, C thay đổi sao cho  $\widehat{BCA} = 90^\circ$ . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$  luôn đi qua hai điểm cố định và tâm đường tròn này nằm trên đường thẳng cố định.

**Giải** (h.18)

a) Ta có IE là đường trung trực của BM

$\Rightarrow \triangle EBM$  cân tại M  $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{M}_1$ .

Mà  $\widehat{B}_1 = \widehat{F}_1$  (cùng phụ với  $\widehat{A}_1$ )

$\Rightarrow \triangle IME \sim \triangle IFA$  (g.g)

$\Rightarrow \frac{IM}{IF} = \frac{IE}{IA} \Rightarrow IE \cdot IF = IA \cdot IM$

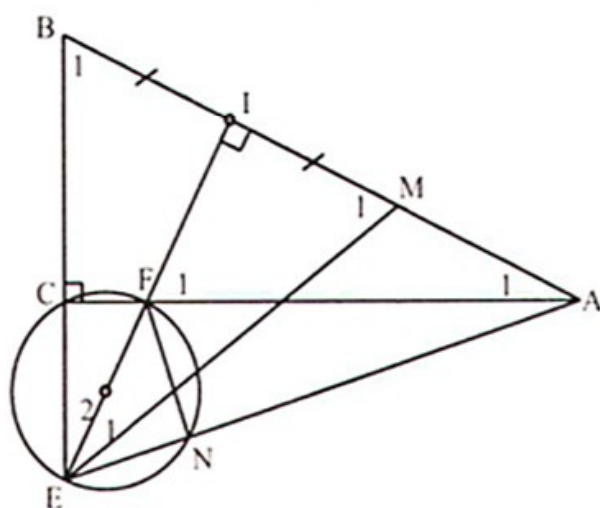
$\Rightarrow IE \cdot IF = IA \cdot IB$ .

b) Ta có  $\widehat{ECF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ENF} = 90^\circ$ .

Xét  $\triangle BAE$  có EI, AC là các đường cao cắt nhau tại F nên  $BF \perp EA$  mà  $FN \perp EA$   
 $\Rightarrow B, F, N$  thẳng hàng.

Ta có  $\widehat{E}_1 = \widehat{A}_1$  suy ra tứ giác AMFE nội tiếp.

Từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$  luôn qua hai điểm A, M cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$  luôn nằm trên đường trung trực của AM cố định.



Hình 18

### C. Bài tập

19. Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm A cố định với  $OA = 2R$ . Một đường kính BC quay quanh O sao cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Đường thẳng AB, AC lại cắt đường tròn  $(O; R)$  lần lượt tại D và E. Nối DE cắt đường thẳng OA tại K.

a) Chứng minh rằng  $OI \cdot OA = OB \cdot OC$  và  $AK \cdot AI = AE \cdot AC$ .

- b) Tính độ dài đoạn thẳng  $OI$  và  $AK$  theo  $R$ .
- c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ADE$  luôn đi qua một điểm cố định khác  $A$  khi  $BC$  quay quanh  $O$ .
20. Cho đường tròn  $(O; R)$ , một dây cung  $CD$  có trung điểm  $H$ . Trên tia đối của tia  $DC$  lấy một điểm  $S$  và qua  $S$  kẻ các tiếp tuyến  $SA, SB$  với đường tròn. Đường thẳng  $AB$  cắt các đường thẳng  $SO, OH$  lần lượt tại  $E, F$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AB$  và  $CD$ .
- a) Chứng minh tứ giác  $SEHF$  nội tiếp được.
- b) Chứng minh  $OH \cdot OF = R^2$ .
- c) Chứng minh  $SI \cdot SH = SC \cdot SD$ .
- d) Khi  $S$  di động trên tia đối của tia  $DC$  chứng minh đường thẳng  $AB$  luôn đi qua một điểm cố định.
21. Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $C$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AO$ . Đường thẳng  $Cx$  vuông góc với đường thẳng  $AB$ ,  $Cx$  cắt nửa đường tròn trên tại  $I$ . Gọi  $K$  là điểm bất kì nằm trên đoạn thẳng  $CI$  ( $K$  khác  $C$  và  $I$ ), tia  $AK$  cắt nửa đường tròn đã cho tại  $M$ . Tiếp tuyến với nửa đường tròn tâm  $O$  tại điểm  $M$  cắt  $Cx$  tại  $N$ . Gọi  $D$  là giao điểm của  $BM$  và  $Cx$ .
- a) Chứng minh rằng bốn điểm  $A, C, M, D$  cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Chứng minh tam giác  $MNK$  cân.
- c) Tính diện tích  $\Delta ABD$  khi  $K$  là trung điểm của đoạn thẳng  $CI$ .
- d) Chứng minh rằng khi  $K$  di động trên đoạn thẳng  $CI$  thì đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AKD$  đi qua một điểm cố định khác  $A$ .
22. Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $A$  khác  $O$  nằm trong đường tròn. Một đường thẳng thay đổi đi qua  $A$  nhưng không đi qua  $O$  cắt đường tròn tại hai điểm  $M, N$ . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OMN$  luôn đi qua một điểm cố định khác  $O$ .
23. Cho điểm  $M$  bất kì trên nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB = 2R$ , qua điểm  $H$  cố định trên đoạn  $OB$ , vẽ đường thẳng  $d$  vuông góc với  $AB$ . Gọi giao điểm của  $MA, MB$  và tiếp tuyến tại  $M$  của đường tròn  $(O)$  với  $d$  lần lượt là  $D, C$  và  $I$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $AC$  và đường tròn  $(O)$ . Gọi  $K$  là giao điểm  $OI$  và  $ME$ .
- a) Chứng minh rằng  $IE$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .
- b) Cho  $M$  di chuyển trên đường tròn ( $M$  không trùng với  $A; B$ ). Chứng minh rằng tích  $OI \cdot OK$  không đổi và  $ME$  luôn đi qua một điểm cố định.

## Chuyên đề 14

# CÁC BÀI TẬP CÓ NỘI DUNG TÍNH TOÁN

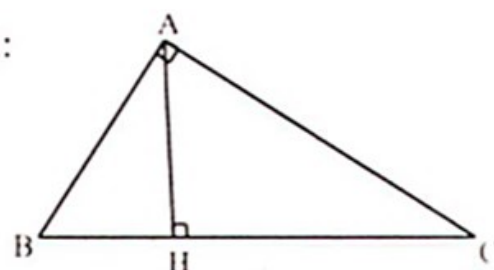
### A. Kiến thức cần nhớ

Để giải các bài tập tính toán, các bạn cần nắm vững các kiến thức sau:

#### 1. Các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

$\Delta ABC$  vuông tại A, có AH là đường cao (h.19a) thì:

- $AB^2 = BC \cdot BH$  ;  $AC^2 = CH \cdot BC$
- $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $AB \cdot AC = BC \cdot AH$
- $AH^2 = BH \cdot CH$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ .



Hình 19 a

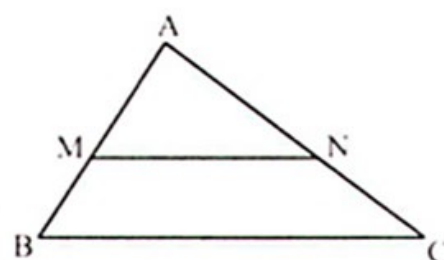
#### 2. Định lý Ta-lét:

Cho  $\Delta ABC$  có  $MN \parallel BC$  ( $M \in AB, N \in AC$ ) (h.19b).

Ta có:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} ;$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} ; \frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC} .$$



Hình 19 b

#### 3. Tính chất đường phân giác trong tam giác:

$$\Delta ABC \text{ có } AD \text{ là phân giác} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} .$$

#### 4. Tam giác đồng dạng:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} ; \hat{A} = \hat{A}' , \hat{B} = \hat{B}' , \hat{C} = \hat{C}' .$$

#### 5. Các tỉ số lượng giác.

6. Công thức tính chu vi, diện tích các hình: tam giác, hình chữ nhật, hình vuông, hình thang, hình bình hành, hình thoi, hình tròn.

## B. Một số ví dụ

**Ví dụ 17.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và một điểm  $S$  ở ngoài đường tròn. Từ  $S$  vẽ hai tiếp tuyến  $SA, SB$  với đường tròn ( $A, B$  là tiếp điểm). Vẽ đường thẳng  $a$  đi qua  $S$  cắt đường tròn  $(O; R)$  tại hai điểm  $M, N$  với  $M$  nằm giữa hai điểm  $S$  và  $N$  (đường thẳng  $a$  không đi qua tâm  $O$ ). Gọi  $H$  là giao của  $SO$  và  $AB$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $MN$ . Hai đường thẳng  $OI$  và  $AB$  cắt nhau tại  $E$ .

- Chứng minh tứ giác  $IHSE$  nội tiếp.
- Chứng minh  $OI.OE = R^2$ .
- Cho biết  $SO = 2R$  và  $MN = R\sqrt{3}$ .  
Tính diện tích tam giác  $ESM$  theo  $R$ .

**Giải** (h.20)

a) Ta có  $\widehat{SHE} = \widehat{SIE} = 90^\circ$  suy ra tứ giác  $IHSE$  nội tiếp đường tròn đường kính  $SE$ .

b)  $\triangle OHE$  và  $\triangle OIS$  có

$$\widehat{OHE} = \widehat{OIS} = 90^\circ; \widehat{SOE} \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle OHE \sim \triangle OIS \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{OH}{OI} = \frac{OE}{OS} \Rightarrow OI.OE = OH.OS. \quad (1)$$

Mặt khác,  $\triangle OBS$  vuông tại  $B$ ,  $BH \perp OS$  nên  $OH.OS = OB^2 = R^2$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $OI.OE = R^2$ .

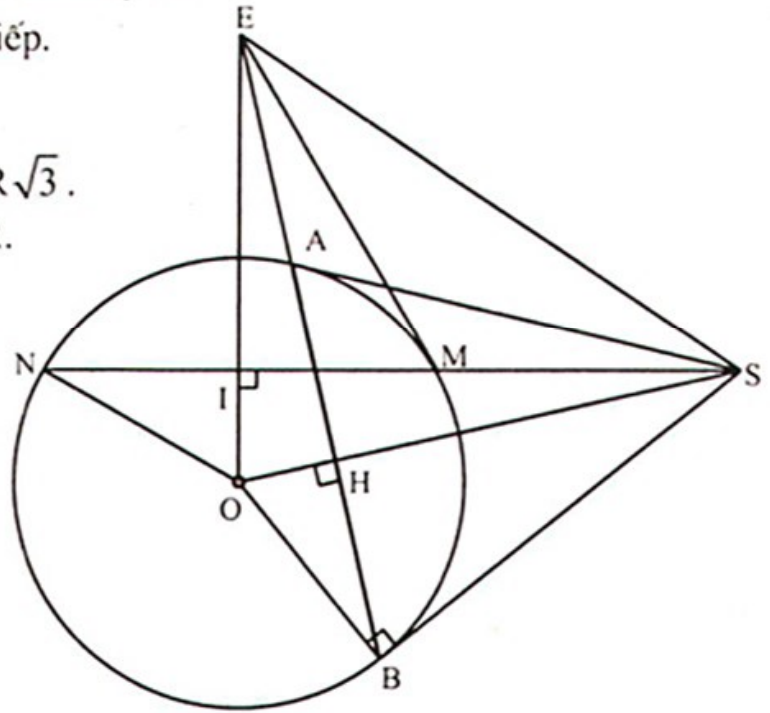
$$c) MN = R\sqrt{3} \Rightarrow IM = IN = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go trong các tam giác vuông ta có:

$$OI^2 + IN^2 = ON^2 \Rightarrow OI^2 + \frac{3R^2}{4} = R^2 \Rightarrow OI^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow OI = \frac{R}{2}.$$

$$OI^2 + IS^2 = OS^2 \Rightarrow \frac{R^2}{4} + IS^2 = 4R^2 \Rightarrow IS^2 = \frac{15R^2}{4} \Rightarrow IS = \frac{R\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } SM = SI - IM = \frac{R(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{2}. \quad (3)$$



Hình 20

$$\text{Áp dụng câu b), } OI \cdot OE = R^2 \Rightarrow \frac{R}{2} \cdot OE = R^2 \Rightarrow OE = 2R. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có diện tích  $\Delta ESM$  là

$$S_{ESM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R}{2} \cdot \frac{R(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{2} = \frac{3R^2(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{8}.$$

**Nhận xét.** Để tính độ dài đoạn thẳng, bạn nên sử dụng định lý Py-ta-go và tam giác đồng dạng để tính tất cả độ dài các đoạn thẳng có thể.

**Ví dụ 18.** Cho một nửa đường tròn đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $M$  là một điểm bất kì trên nửa đường tròn đó sao cho  $\widehat{MAB} = \alpha$  ( $\alpha < 45^\circ$ ). Từ  $M$  vẽ  $MH$  vuông góc với tiếp tuyến tại  $B$  của nửa đường tròn.

a) Tính các đoạn  $MA$ ,  $MB$ ,  $MH$  theo  $R$  và  $\alpha$ .

b) Tính  $MH$  theo  $R$  và  $2\alpha$ .

c) Chứng minh hệ thức  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$  và  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ .

**Giải** (h.21)

a) Ta có  $\widehat{AMB} = 90^\circ$  nên

$$MA = AB \cdot \cos \alpha = 2R \cdot \cos \alpha,$$

$$MB = AB \cdot \sin \alpha = 2R \cdot \sin \alpha.$$

Ta có  $\widehat{MHB} = 90^\circ$  và  $\widehat{MBH} = \widehat{MAB} = \alpha$  nên  $MH = MB \cdot \sin \alpha = 2R \cdot \sin^2 \alpha$ .

b) Kẻ  $MK \perp AB$  thì ta có

$$OK = OM \cdot \cos 2\alpha = R \cdot \cos 2\alpha.$$

$$\text{Mà } BK = OB - OK = R - R \cdot \cos 2\alpha = R(1 - \cos 2\alpha).$$

Mặt khác  $BHMK$  là hình chữ nhật nên  $MH = BK = R(1 - \cos 2\alpha)$ .

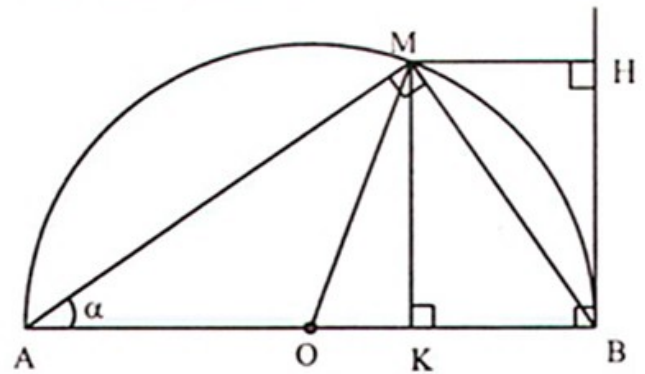
c) Từ câu a) và câu b) ta có:

$$R \cdot (1 - \cos 2\alpha) = 2R \cdot \sin^2 \alpha (= MH) \Rightarrow 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha \text{ hay } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

$$\text{Từ công thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\text{nên } \cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1.$$

**Ví dụ 19.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và một đường tròn tâm  $I$  bán kính  $2R$  đi qua tâm  $O$ . Các tiếp tuyến chung  $ADB$  và  $AEC$  của hai đường tròn đó cắt nhau tại  $A$ , tiếp xúc với đường tròn lớn tại  $B, C$  và với đường tròn nhỏ tại  $D, E$ .



Hình 21



- a) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC và xác định dạng của nó.  
 b) Tính diện tích hình BOCEDB (hình bao gồm cung BOC của đường tròn lớn, đoạn thẳng CE, cung ED của đường tròn nhỏ và đoạn thẳng DB).

**Giải** (h.22)

a) AB và AC là tiếp tuyến của đường tròn (I)  $\Rightarrow AB = AC$

$\Rightarrow \Delta ABC$  cân tại A.

$\Delta ABI$  có  $OD \parallel BI$  (vì cùng vuông góc với AB)

$$\Rightarrow \frac{AO}{AI} = \frac{OD}{BI} = \frac{R}{2R} \Rightarrow \frac{AO}{AI} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{1}{2} AI \Rightarrow AO = OI = 2R \Rightarrow AI = 4R.$$

$$\text{Xét } \Delta ABI \text{ có } AB^2 = AI^2 - IB^2 = 16R^2 - 4R^2 = 12R^2$$

$$\Rightarrow AB = 2R\sqrt{3} \Rightarrow AC = 2R\sqrt{3}.$$

Gọi H là giao điểm của AI và BC suy ra AH là đường phân giác của  $\Delta ABC$  cân tại A, do đó AH là đường cao, đường trung tuyến.

$$\text{Xét } \Delta ABI \text{ có } \widehat{ABI} = 90^\circ, BH \perp AI \text{ nên } AI \cdot IH = IB^2 \Rightarrow 4R \cdot IH = 4R^2 \Rightarrow IH = R.$$

$$\text{Xét } \Delta BHI \text{ vuông tại H nên } BH^2 = BI^2 - IH^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

$$\Rightarrow BH = R\sqrt{3} \Rightarrow BC = 2R\sqrt{3} \Rightarrow AB = AC = BC = 2R\sqrt{3} \Rightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác đều.}$$

$$\text{b) } \Delta ABI \text{ có DO là đường trung bình nên } AD = DB = \frac{1}{2} AB = R\sqrt{3}.$$

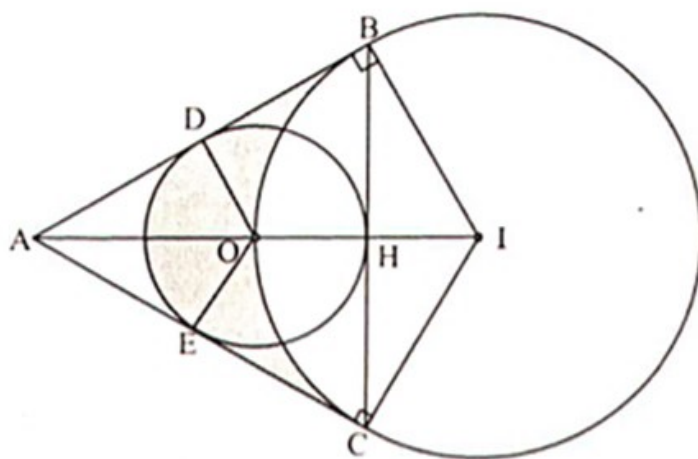
$$\text{Suy ra diện tích tứ giác ADOE là } S_1 = 2S_{ADO} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot OD = R^2\sqrt{3}.$$

Tứ giác ADOE có  $\widehat{A} = 60^\circ$ ;  $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$  nên  $\widehat{DOE} = 120^\circ$ .

$$\text{Do đó diện tích hình quạt DOE là } S_2 = \frac{\pi R^2 n}{360^\circ} = \frac{\pi R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{3}.$$

Từ đó suy ra diện tích hình giới hạn bởi AD, AE và cung nhỏ DE là :

$$S_3 = S_1 - S_2 = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{3}.$$



Hình 22

Tương tự, ta có diện tích tứ giác ABIC là  $S_4 = 2.S_{ABI} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BI = 4R^2\sqrt{3}$ .

Diện tích hình quạt BIC là  $S_5 = \frac{4\pi R^2}{3}$ .

Diện tích hình BOCED là:

$$S = S_4 - S_5 - S_3 = 4R^2\sqrt{3} - \frac{4\pi R^2}{3} - \frac{R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{3} = R^2(3\sqrt{3} - \pi).$$

### C. Bài tập

24. Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính AC. Vẽ dây BD vuông góc với AC tại K (K nằm giữa A và O). Lấy E trên cung nhỏ CD (E không trùng với C, D). Gọi H là giao điểm của AE và BD.
- Chứng minh tứ giác CEHK nội tiếp.
  - Chứng minh  $AD^2 = AH \cdot AE$ .
  - Cho  $BD = 12\text{cm}$ ,  $BC = 10\text{cm}$ . Tính diện tích hình tròn  $(O; R)$ .
  - Đặt  $\widehat{BCD} = \alpha$ . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ tam giác MBC cân tại M. Tính số đo góc MBC theo  $\alpha$  để điểm M thuộc đường tròn  $(O; R)$ .
25. Cho đoạn thẳng  $AB = 2a$  có trung điểm O. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn  $(O)$  đường kính AB và nửa đường tròn  $(O')$  đường kính AO. Trên đường tròn  $(O')$  lấy điểm M (khác A và O), tia OM cắt đường tròn  $(O)$  tại C. Gọi D là giao điểm thứ hai của CA với nửa đường tròn  $(O')$ .
- Chứng minh tam giác ADM cân.
  - Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn  $(O)$  cắt OD tại E. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng EA đối với các nửa đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ .
  - Đường thẳng AM và OD cắt nhau tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt nửa đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai là N. Chứng minh ba điểm A, M, N thẳng hàng.
  - Tại vị trí của M sao cho ME song song với AB. Hãy tính độ dài đoạn thẳng OM theo a.
26. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn  $(O)$  kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Từ một điểm M trên cung nhỏ BC kẻ một tiếp tuyến thứ ba cắt AB, AC lần lượt tại P, Q.

- a) Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên cung nhỏ BC thì chu vi tam giác APQ có giá trị không đổi.
- b) Cho biết  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  và bán kính của đường tròn (O) bằng 6cm. Tính độ dài của tiếp tuyến AB và diện tích phần mặt phẳng được giới hạn bởi hai tiếp tuyến AB, AC và cung nhỏ BC.
27. Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự đó trên một đường thẳng với  $AB = 2BC$ . Vẽ hai nửa đường tròn tâm O và O' có đường kính lần lượt là AB và BC thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là AC, tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với nửa đường tròn (O) và nửa đường tròn (O') lần lượt tại F và G, tiếp tuyến này cắt các tiếp tuyến với hai nửa đường tròn vẽ từ A và C theo thứ tự tại D và E. Tiếp tuyến chung trong ở B cắt DE tại I.
- a) Chứng minh các tam giác OIO', DOI, IO'E là các tam giác vuông.
- b) Tính BI, GE và AD theo  $O'C = R$ .
- c) Tính diện tích hình thang ACED và diện tích phần ở trong hình thang này nhưng ngoài hai nửa hình tròn theo  $O'C = R$ .

## *Chuyên đề 15*

# QUỸ TÍCH VÀ DỤNG HÌNH

### A. Kiến thức cần nhớ

#### 1. Các quỹ tích cơ bản

Để tìm quỹ tích (tập hợp điểm) trong mặt phẳng, người ta thường dựa vào các quỹ tích cơ bản. Ta có một số quỹ tích cơ bản sau đây:

**Quỹ tích 1:** Quỹ tích những điểm cách đều hai điểm A và B cố định là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

**Quỹ tích 2:** Quỹ tích những điểm cách đều hai cạnh của một góc là đường phân giác của góc đó.

**Quỹ tích 3:** Quỹ tích những điểm cách đều đường thẳng xy cố định một khoảng bằng a cho trước là hai đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng a.

**Quỹ tích 4:** Quỹ tích những điểm cách đều điểm O cố định một khoảng R cho trước là đường tròn có tâm là O và bán kính bằng R.

**Quỹ tích 5:** Quỹ tích những điểm nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc  $\alpha$  không đổi ( $0 < \alpha < 180^\circ$ ) là hai cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên đoạn thẳng AB.

Đặc biệt, nếu  $\alpha = 90^0$  thì ta nhận được:

**Quy tích 5a:** Quy tích những điểm nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

## 2. Các bước giải một bài toán quy tích

Muốn chứng minh quy tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất  $\tau$  là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần :

- **Phần thuận :** Mọi điểm có tính chất  $\tau$  đều thuộc hình H.  
Giới hạn: Căn cứ vào các vị trí đặc biệt của M, xem điểm M thuộc cả hình H hay chỉ thuộc một phần  $H_1$  của hình H.
- **Phần đảo :** Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất  $\tau$
- **Kết luận :** Quy tích (tập hợp) các điểm M có tính chất  $\tau$  là hình H.

Trong các đề thi vào lớp 10, người ta thường không yêu cầu học sinh phải làm các bài toán quy tích hoàn chỉnh, mà chỉ hỏi "Điểm M có tính chất a chuyển động trên đường nào?". Trong trường hợp này, nội dung của bài toán tương ứng với phần thuận (kèm theo giới hạn nếu có).

## 3. Các bước để giải bài toán dựng hình

Bài toán dựng hình (bằng thước và compa) đầy đủ gồm bốn bước:

- **Phân tích:** Giả sử hình đó đã dựng được, trước hết vẽ phác một hình gần giống hình cần dựng trên những nét cơ bản, khi cần thiết phải vẽ thêm những đường liên quan, nghiên cứu tỉ mỉ mối quan hệ phụ thuộc giữa các điều kiện trong hình, dựa vào đó xem những yếu tố nào của hình có thể dựng được ngay, điểm nào còn phải dựng thì phải thỏa mãn hai điều kiện.
- **Cách dựng:** Nêu thứ tự từng bước dựng hình dựa vào các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản. Đồng thời thể hiện các bước dựng đó trên hình vẽ.
- **Chứng minh:** Dùng lập luận để chứng minh hình dựng được bằng phương pháp đã trình bày là hoàn toàn phù hợp với các điều kiện đã cho của bài toán.
- **Biện luận:** Phân tích mối quan hệ giữa các điều kiện đã cho và hình đã dựng được. Chỉ rõ trong trường hợp nào bài toán dựng được và dựng được bao nhiêu hình thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Trong chương trình toán Trung học cơ sở, chỉ yêu cầu học sinh trình bày hai phần : cách dựng và chứng minh. Trong một số trường hợp, bài toán dựng hình là

một trong nhiều câu của bài toán. Khi đó, để giảm nhẹ yêu cầu của bài toán dựng hình, trong đề toán thường chỉ nêu cách dựng (có vẽ hình minh họa).

## B. Một số ví dụ

**Ví dụ 20.** Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$ . Trên cung nhỏ  $AC$  lấy điểm  $M$ . Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $AM$  và  $AB$ , đường thẳng  $IK$  cắt  $CM$  tại  $H$ . Tìm quỹ tích điểm  $H$ .

**Giải** (h.23)

*Phân thuận.* Giả sử điểm  $H$  thỏa mãn điều kiện đề bài, ta có:

$IK$  là đường trung bình của tam giác  $ABM$

$\Rightarrow IK \parallel BM$ .

Mà  $\widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KHC} = 90^\circ \Rightarrow H$  thuộc đường tròn  $(O_1)$  đường kính  $KC$

$\Rightarrow H \in (O_1)$ , ngoại tiếp  $\Delta ACK$  cố định.

Giới hạn : Khi  $M$  tiến tới điểm  $A$  thì  $H$  tiến tới điểm  $A$ , khi  $M$  tiến tới điểm  $C$  thì  $H$  tiến tới điểm  $H_0$  là giao điểm thứ hai của đường tròn  $(O_1)$  với tiếp tuyến  $xy$  tại  $C$  của đường tròn  $(O)$ , suy ra điểm  $H$  thuộc cung  $AH_0$ .

*Phân đảo.* Lấy điểm  $H$  bất kì trên cung  $AH_0$ . Ta phải chứng minh tồn tại điểm  $M$  thuộc cung  $AC$  của đường tròn  $(O)$  có điểm  $I$  là trung điểm  $AM$  và  $KH$  đi qua trung điểm  $I$  của  $AM$ . Kẻ  $CH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $M$ ,  $MA$  cắt  $HK$  tại  $I$ . Ta có  $KH \parallel BM$  (vì cùng vuông góc với  $CM$ ). Trong  $\Delta ABM$  có  $KB = KA, KI \parallel MB \Rightarrow AI = MI$ .

*Kết luận.* Quỹ tích những điểm  $H$  thỏa mãn điều kiện của bài toán là cung  $AH_0$  của đường tròn đường kính  $CK$ .

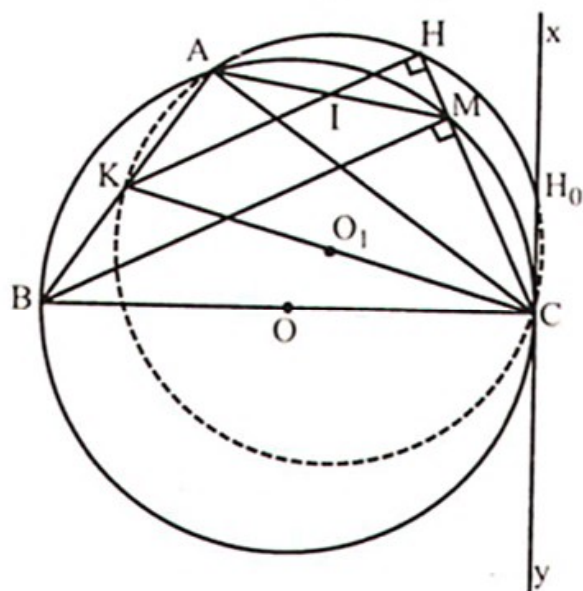
**Ví dụ 21.** Cho tam giác cân  $ABC$  ( $AB = AC > BC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$  và một điểm  $M$  bất kì trên cung nhỏ  $AC$ . Tia  $Bx$  vuông góc với  $AM$  và cắt  $CM$  tại  $D$ .

a) Chứng minh  $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ .

b) Chứng minh rằng tam giác  $BMD$  cân.

c) Chứng minh rằng khi  $M$  di động trên cung nhỏ  $AC$  thì độ lớn góc  $BDC$  không đổi và  $D$  thuộc một đường tròn cố định.

d) Xác định vị trí của  $M$  để tứ giác  $ABMD$  là hình thoi.



Hình 23

**Giải** (h.24)

a)  $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$  (vì cùng bù với  $\widehat{AMC}$ ).

b) Ta có  $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$  (góc nội tiếp),  
 $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$  (giả thiết), mà  
 $\widehat{AMD} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMD}$ .

$\Delta BMD$  có  $MA$  vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên  $\Delta BMD$  cân tại  $M$ .

c) \*  $\Delta BMD$  cân tại  $M \Rightarrow \widehat{BMC} = 2.\widehat{BDC}$   
 mà  $\widehat{BMC} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BDC} = \frac{1}{2}.\widehat{BAC}$ .

Vậy khi  $M$  di động trên cung nhỏ  $AC$  thì độ lớn góc  $\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$  không đổi.

\*  $\Delta BMD$  cân tại  $M$  có  $MA$  là đường cao  $\Rightarrow MA$  là đường trung trực  $\Rightarrow AB = AD$ .  
 Vậy khi  $M$  di động trên cung nhỏ  $AC$  thì  $D$  thuộc đường tròn  $(A; AB)$  cố định.

**Nhận xét.** Bạn có thể dùng cung chứa góc.

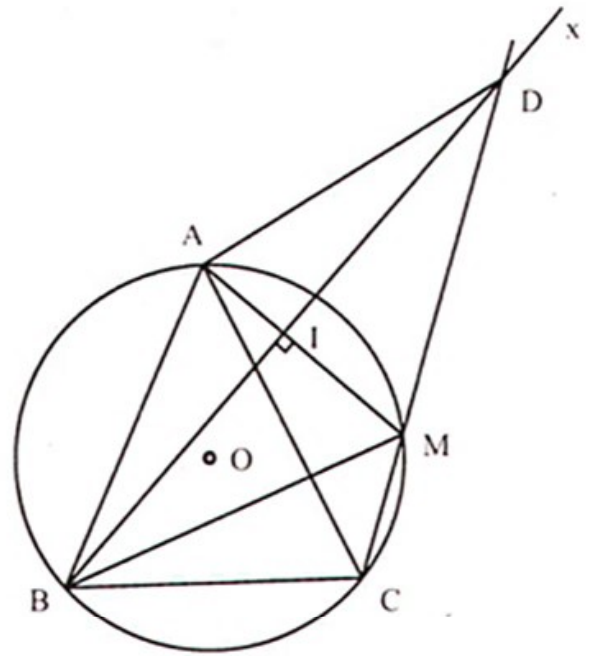
$\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$  không đổi;  $B, C$  cố định  $\Rightarrow D$  nhìn  $BC$  dưới một góc không đổi  $\Rightarrow D$  thuộc cung chứa góc  $\frac{1}{2}\widehat{BAC}$  dựng trên đoạn  $BC$ .

d) Gọi  $I$  là giao điểm của  $Bx$  và  $AM$ . Vì  $IB = ID$  và  $AM \perp BD$  nên  $ABMD$  là hình thoi khi và chỉ khi  $IA = IM \Leftrightarrow \Delta BAM$  cân tại  $B \Leftrightarrow BO \perp AM \Leftrightarrow M$  đối xứng với  $A$  qua đường thẳng  $BO$ .

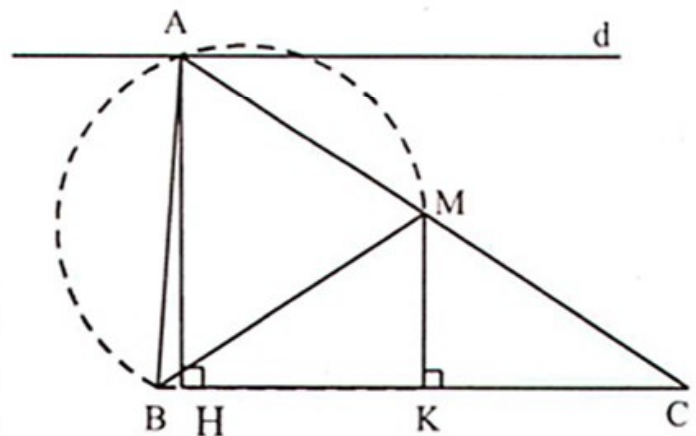
**Ví dụ 22.** Dựng tam giác  $ABC$  biết  $\widehat{A} = 60^\circ$ , đường cao  $AH = 4\text{cm}$ , đường trung tuyến  $BM = 3\text{cm}$ .

**Giải** (h.25)

**Phân tích.** Giả sử  $\Delta ABC$  dựng được thỏa mãn đề bài  $\widehat{A} = 60^\circ$ , đường cao  $AH = 4\text{cm}$ , đường trung tuyến  $BM = 3\text{cm}$ .



Hình 24



Hình 25

Kẻ  $MK \perp BC$  suy ra  $MK$  là đường trung bình của  $\Delta AHC \Rightarrow MK = \frac{1}{2}.AH = 2\text{cm}$ .

$\Delta BMK$  dựng được vì biết :  $\widehat{K} = 90^0$ ;  $MK = 2\text{cm}$ ;  $BM = 3\text{cm}$ .

Điểm  $A$  thỏa mãn hai điều kiện :

\*  $A$  thuộc cung chứa góc  $60^0$  dựng trên đoạn thẳng  $BM$ .

\*  $A$  thuộc đường thẳng  $d \parallel BK$  và cách  $BC$  một khoảng bằng  $4\text{cm}$ .

Từ đó dựng được điểm  $C$ .

*Cách dựng:*

- Dựng  $\Delta BMK$  với  $\widehat{K} = 90^0$ ;  $BM = 3\text{cm}$ ;  $MK = 2\text{cm}$ .
- Dựng cung chứa góc  $60^0$  dựng trên đoạn thẳng  $BM$  (khác phía với  $BK$ ).
- Dựng đường thẳng  $d \parallel BK$  và cách  $BK$  là  $3\text{cm}$ .
- Gọi  $A$  là giao điểm của  $d$  và cung chứa góc  $60^0$ .
- $C$  là giao điểm của  $AM$  và  $BK$ , khi đó  $\Delta ABC$  là tam giác phải dựng.

*Chứng minh:* Theo cách dựng  $\widehat{A} = 60^0$ ;  $AH = 4\text{cm}$ .

$\Delta CAH$  có  $MK \parallel AH$  và  $MK = \frac{1}{2}.AH \Rightarrow CM = \frac{1}{2}.CA$ .

Từ đó suy ra  $BM$  là đường trung tuyến,  $BM = 3\text{cm}$ , thỏa mãn điều kiện đề bài.

*Biện luận:* Bài toán có hai nghiệm hình.

## C. Bài tập

28. Cho tam giác  $ABC$  nhọn nội tiếp trong đường tròn  $(O)$ . Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$ ,  $OI$  kéo dài cắt đường tròn  $(O)$  tại  $M$ . Hai đường cao  $AD$  và  $CE$  cắt nhau tại  $H$ , nối  $ED$ , kéo dài  $AD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $F$ .

- Chứng minh điểm  $M$  nằm chính giữa cung nhỏ  $BC$ .
- Chứng minh tia  $AM$  vừa là phân giác của góc  $BAC$  vừa là phân giác của góc  $FAO$ .
- Chứng minh  $H$  và  $F$  đối xứng với nhau qua cạnh  $BC$ .
- Từ đề bài và các chứng minh trên suy ra cách dựng tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ , bán kính bằng  $2,5\text{cm}$ ; biết  $BC = 4\text{cm}$ ; góc giữa đường phân giác của góc  $A$  và đường cao xuất phát từ  $A$  bằng  $15^0$ . Vẽ hình minh họa.

29. Cho hình thang ABCD ( $AD \parallel BC$  và  $AD > BC$ ) nội tiếp đường tròn tâm O, các cạnh AB, DC kéo dài cắt nhau tại điểm I. Các tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại các điểm B, D cắt nhau tại điểm K.
- Chứng minh rằng góc IBK bằng góc CDK.
  - Chứng minh  $IK \parallel BC$ .
  - Hình thang ABCD phải thỏa mãn điều kiện gì để tứ giác AIKD là hình bình hành? Tại sao? Vẽ hình minh họa.
  - Cho trước đường tròn tâm O và một dây BD (không đi qua O). Hãy dựng hình thang ABCD nội tiếp đường tròn tâm O sao cho tứ giác BIKC (thỏa mãn các điều kiện trên) là hình bình hành. Vẽ hình minh họa.
30. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự ấy và một đường thẳng d vuông góc với AC tại A. Vẽ đường tròn đường kính BC và trên đó lấy điểm M bất kì. Tia CM cắt đường thẳng d tại D. Tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai là N. Tia DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai là P.
- Chứng minh rằng tứ giác ABMD nội tiếp được.
  - Chứng minh tích  $CM \cdot CD$  không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
  - Chứng minh rằng  $AD \parallel NP$ .
  - Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác MAC thuộc đường tròn cố định khi M di động.
31. Cho đường tròn  $(O; R)$  có AB là đường kính cố định, còn CD là đường kính thay đổi. Gọi d là tiếp tuyến với đường tròn tại B. Đường thẳng AD, AC cắt d lần lượt tại Q và P.
- Chứng minh tứ giác CPQD nội tiếp.
  - Chứng minh trung tuyến AI của tam giác APQ vuông góc với CD.
  - Tìm quỹ tích tâm E của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPD.
32. Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB = 2R$ ; OC là bán kính vuông góc với AB, Gọi P là điểm di động trên đoạn OC (P khác C và O). Tia AP cắt đường tròn tại M, tiếp tuyến tại M với đường tròn cắt đường thẳng OC tại D.
- Chứng minh tam giác DMP cân.
  - Nêu cách dựng điểm P để  $PO = PM$ , khi đó xác định độ lớn các góc của tam giác AMB.
  - Nêu cách dựng điểm M để  $MB = MP$ , khi đó tính diện tích tam giác AMB.
  - Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMP nằm trên một đường thẳng cố định.



## Chuyên đề 16

# BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

### A. Kiến thức cần nhớ

1. Sử dụng mối quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc.

Từ điểm A ở ngoài đường thẳng d kẻ AH vuông góc với d. Với bất kỳ điểm B trên đường thẳng d ta có  $AH \leq AB$ . Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi B trùng với H.

2. Sử dụng quy tắc ba điểm.

Với ba điểm bất kỳ A, B, C ta luôn có  $AB \leq AC + CB$ .

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi C là một điểm thuộc đoạn thẳng AB.

3. Sử dụng bất đẳng thức trong đường tròn.

Trong đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

4. Sử dụng bất đẳng thức đại số: với x, y là các số không âm, ta có:

$$\bullet \frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy.$$

$$\bullet \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

$$\bullet \frac{x^2 + y^2}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \geq xy.$$

Dấu "=" xảy ra với các bất đẳng thức trên khi  $x = y$ .

### B. Một số ví dụ

**Ví dụ 23.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng d thay đổi đi qua A cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại M và N (A nằm giữa M và N).

a) Chứng minh rằng góc MBN có giá trị không đổi.

b) Tìm vị trí của đường thẳng d để chu vi tam giác MBN lớn nhất.

c) Tìm vị trí của đường thẳng d để diện tích tam giác MBN lớn nhất.

**Giải** (h.26)

a) Xét (O), ta có  $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$  không đổi.

Xét (O'), ta có  $\widehat{ANB} = \frac{1}{2} \widehat{AO'B}$  không đổi.

Suy ra  $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \frac{1}{2} \cdot (\widehat{AOB} + \widehat{AO'B})$  không đổi.

Xét tam giác MBN có

$$\widehat{MBN} + \widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 180^\circ.$$

Suy ra  $\widehat{MBN}$  không đổi.

b) Kẻ đường kính AC của đường tròn (O), đường kính AD của đường tròn (O')  $\Rightarrow$  C, D cố định.

$$\text{Ta có } \widehat{ABC} = 90^\circ; \widehat{ABD} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$  C, B, D thẳng hàng,

mà  $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}; \widehat{ANB} = \widehat{ADC}$  suy ra  $\Delta ACD \sim \Delta BMN$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{BM}{AC} = \frac{BN}{AD} = \frac{MN + BM + BN}{CD + AC + AD} \leq 1 \text{ (vì } BN \leq AD).$$

Suy ra  $MN + BM + BN \leq CD + AC + AD$ .

Do đó chu vi tam giác BMN lớn nhất bằng chu vi tam giác ACD khi BN là đường kính hay  $MN \parallel CD$ .

$$\text{c) Ta có } \Delta BMN \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{S_{BMN}}{S_{ACD}} = \left(\frac{BN}{AD}\right)^2 \leq 1.$$

Do đó  $S_{BMN} \leq S_{ACD}$ .

Vậy diện tích tam giác BMN lớn nhất bằng diện tích tam giác ACD khi BN là đường kính hay  $MN \parallel CD$ .

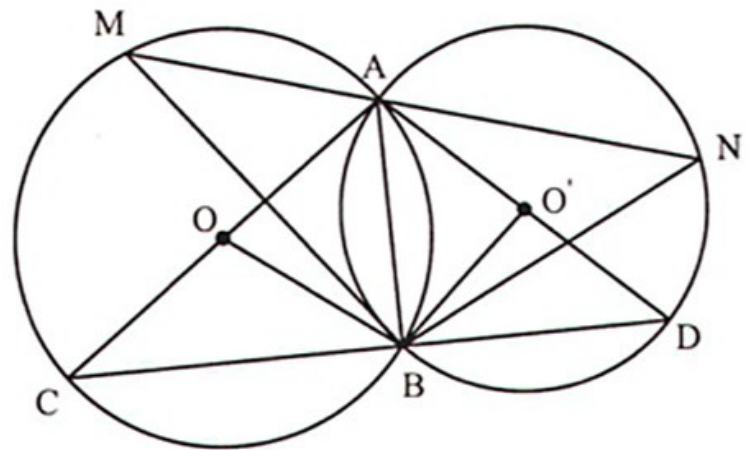
**Nhận xét.** Khi MN thay đổi, ta có  $\widehat{MBN}; \widehat{BMN}$  không đổi nên ta có tam giác BMN luôn tự đồng dạng với chính nó. Một tam giác tự đồng dạng có chu vi (hoặc diện tích) lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) khi một cạnh lớn nhất (hoặc nhỏ nhất). Từ đó ta có định hướng để chứng minh.

**Ví dụ 24.** Tìm một hình chữ nhật nội tiếp đường tròn có diện tích lớn nhất.

**Giải** (h.27). Giả sử hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn (O; R).

**Cách 1.** Kẻ  $AH \perp DB$ . Ta có  $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD}$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AH = 2R \cdot AH \leq 2R \cdot AO = 2R^2.$$



Hình 26

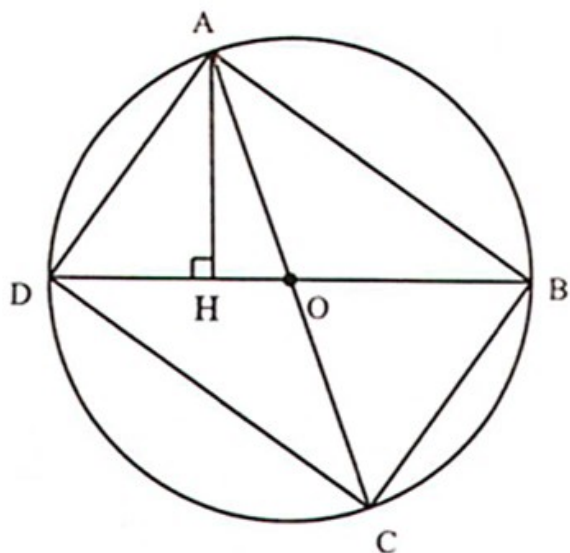
Vậy diện tích hình chữ nhật ABCD lớn nhất bằng  $2R^2$  khi  $H \equiv O$  hay ABCD là hình vuông.

Cách 2.  $\Delta ABC$  vuông tại B theo định lý Py-ta-go, ta có:  $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 4R^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC \leq \frac{AB^2 + BC^2}{2} = \frac{4R^2}{2} = 2R^2.$$

Vậy diện tích hình chữ nhật ABCD lớn nhất bằng  $2R^2$  khi  $AB = BC$  hay ABCD là hình vuông.



Hình 27

**Nhận xét:** Ý tưởng của hai lời giải trên là:

- Nếu tam giác có một cạnh không đổi thì diện tích lớn nhất khi đường cao ứng với cạnh đó lớn nhất.
- Các yếu tố về cạnh có tổng bình phương không đổi (tổng hai cạnh không đổi hoặc tích hai cạnh không đổi) thì ta có thể vận dụng bất đẳng thức đại số.

**Ví dụ 25.** Trên đường tròn  $(O; R)$  có dây  $BC < 2R$  cố định. Xác định vị trí điểm A trên cung lớn BC để:

- Chu vi  $\Delta ABC$  lớn nhất.
- Diện tích  $\Delta ABC$  lớn nhất.

**Giải**

a) (h.28) Đặt  $\widehat{BAC} = \alpha$ . Vì BC cố định nên  $\alpha$  không đổi.

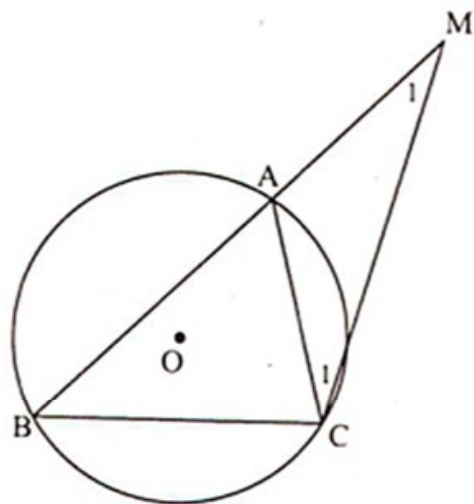
Trên tia đối của tia AB lấy  $AM = AC$ .

Suy ra  $\Delta AMC$  cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{C}_1 = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \alpha$$

$\Rightarrow M$  thuộc cung chứa góc  $\frac{1}{2} \alpha$  dựng trên đoạn thẳng BC (phần nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A).

Ta có chu vi  $\Delta ABC$  là  $AB + AC + BC = BM + BC$ .



Hình 28

Chu vi  $\Delta ABC$  lớn nhất  $\Leftrightarrow BM$  lớn nhất  $\Leftrightarrow BM$  là đường kính của đường tròn chứa cung chứa góc  $\frac{1}{2}\alpha \Leftrightarrow \widehat{BCM} = 90^\circ \Leftrightarrow AB = AC = AM$ .

Hay A là điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn (O; R).

b) (h.29) *Cách 1.* Kẻ  $AH \perp BC$ ,  $OM \perp BC$ .

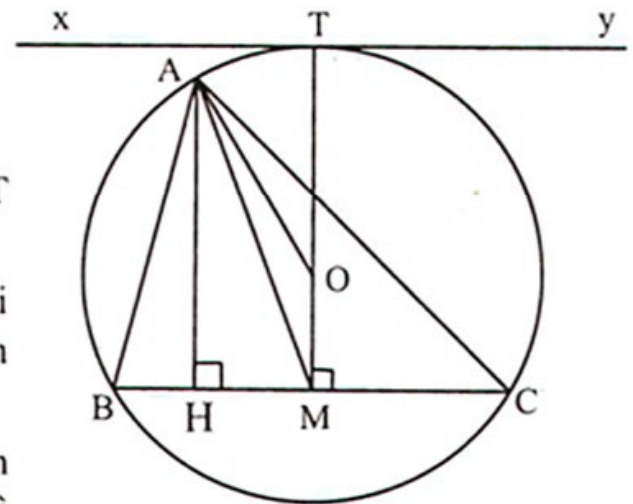
Ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH \leq \frac{1}{2}BC \cdot AM \leq \frac{1}{2}BC \cdot (AO + OM)$ .

Mà BC, AO, OM không đổi nên diện tích  $\Delta ABC$  lớn nhất bằng  $\frac{1}{2}BC(AO + OM)$ .

Khi  $H \equiv M$ ; A, O, M thẳng hàng  $\Leftrightarrow A \equiv T$  là điểm chính giữa của cung lớn BC.

*Cách 2.* Kẻ tiếp tuyến  $xy \parallel BC$  tiếp xúc với cung lớn BC tại T, khi đó T là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Nếu A trùng với T thì AH là khoảng cách giữa  $xy$  và BC. Nếu A không trùng với T thì AH nhỏ hơn khoảng cách giữa  $xy$  và BC.



Hình 29

Mà  $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH$  nên  $S_{ABC}$  lớn nhất  $\Leftrightarrow AH$  lớn nhất  $\Leftrightarrow A$  trùng với T.

**Ví dụ 26.** Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định. Lấy điểm I nằm giữa A và O sao cho  $AI = \frac{2}{3}AO$ . Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt đoạn thẳng MN tại E.

a) Chứng minh rằng tứ giác IECB nội tiếp.

b) Chứng minh rằng  $AM^2 = AE \cdot AC$ .

c) Xác định vị trí điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

**Giải** (h.30)

a) Ta có  $\widehat{EIB} = 90^\circ$ ;  $\widehat{ECB} = 90^\circ \Rightarrow$  tứ giác IECB nội tiếp đường tròn đường kính BE.

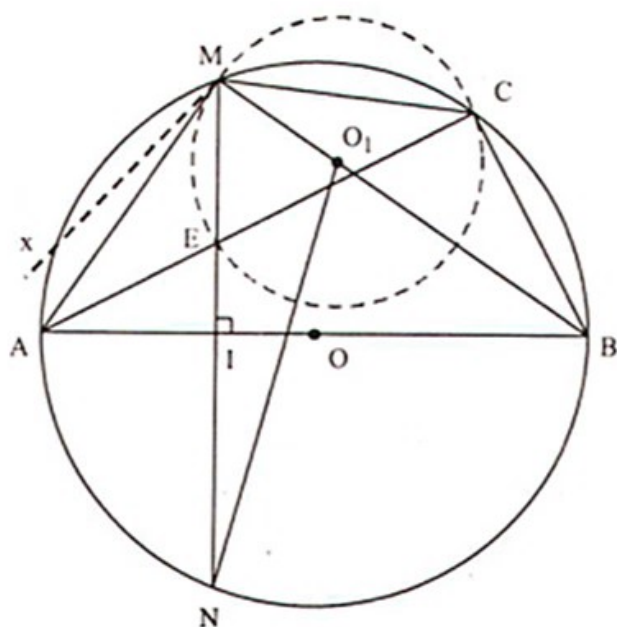
b) Ta có  $AB \perp MN \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{AN}$  nên  $\widehat{AMN} = \widehat{ACM}$ .

Lại có  $\widehat{CAM}$  chung nên  $\triangle AME \sim \triangle ACM$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE \cdot AC.$$

c) Trên nửa mặt phẳng bờ ME có chứa điểm A, ta vẽ tiếp tuyến Mx của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle MCE \Rightarrow \widehat{EMx} = \widehat{ECM}$  mà  $\widehat{EMA} = \widehat{ECM}$  (chứng minh câu b)  $\Rightarrow \widehat{EMx} = \widehat{EMA} \Rightarrow MA$  và tia Mx trùng nhau  $\Rightarrow MA$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle MCE$ .

Gọi  $O_1$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCE  $\Rightarrow O_1M \perp MA$ . Mặt khác ta có  $BM \perp MA \Rightarrow M, O_1, B$  thẳng hàng  $\Rightarrow NO_1$  nhỏ nhất khi  $NO_1 \perp BM$ . Khi đó ta xác định được điểm C như sau: Kẻ  $NO_1 \perp MB$  tại  $O_1$ . Vẽ đường tròn tâm  $O_1$  bán kính  $O_1M$  cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C.



Hình 30

### C. Bài tập

33. Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2R$ . Vẽ tiếp tuyến Ax. Lấy điểm M trên nửa đường tròn. Tia BM cắt Ax tại C. Xác định vị trí điểm M để  $2 \cdot BM + BC$  đạt giá trị nhỏ nhất.
34. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính  $AB = 2R$ . Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn, vẽ MH vuông góc với AB. Xác định vị trí điểm M để:
  - a) Diện tích tam giác OMH lớn nhất.
  - b) Chu vi tam giác OMH lớn nhất.
35. Cho đường tròn tâm O, đường kính  $AB = 2R$  và điểm C thuộc nửa đường tròn. Kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H trên AC và BC. Tìm vị trí của điểm C để:
  - a) Độ dài đoạn EF lớn nhất.
  - b) Tứ giác CEHF có diện tích lớn nhất.
36. Cho đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB dựng các hình vuông AMCD và MBEF. Hai đường thẳng AF và BC cắt nhau tại N.

- a) Chứng minh  $AF$  vuông góc với  $BC$ . Suy ra điểm  $N$  nằm trên hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông  $AMCD$  và  $MBEF$ .
- b) Chứng minh ba điểm  $D, N, E$  thẳng hàng và  $MN \perp DE$  tại  $N$ .
- c) Cho  $A, B$  cố định còn  $M$  di động trên đoạn thẳng  $AB$ . Chứng minh đường thẳng  $MN$  luôn đi qua một điểm cố định.
- d) Tìm vị trí điểm  $M$  sao cho đoạn thẳng  $MN$  có độ dài lớn nhất.
37. Cho đường tròn  $(O; R)$  và dây cung  $BC < 2R$  cố định. Gọi  $A$  là điểm di động trên cung lớn  $BC$  của đường tròn  $(O; R)$  ( $A$  không trùng với  $B$  và  $C$ ). Tia phân giác của góc  $ACB$  cắt đường tròn  $(O; R)$  tại điểm  $D$  khác  $C$ , lấy điểm  $I$  thuộc đoạn  $CD$  sao cho  $DI = DB$ . Đường thẳng  $BI$  cắt đường tròn  $(O; R)$  tại  $K$  khác điểm  $B$ .
- a) Chứng minh rằng  $\Delta KAC$  cân.
- b) Chứng minh đường thẳng  $AI$  luôn đi qua một điểm  $E$  cố định, từ đó hãy xác định vị trí của  $A$  để độ dài  $AI$  là lớn nhất.
- c) Tìm vị trí của  $A$  để  $\Delta ABC$  có chu vi lớn nhất.
38. Cho đường tròn  $(O; R)$  và đường thẳng  $d$  không qua  $O$  cắt đường tròn tại hai điểm  $A, B$ . Lấy điểm  $M$  nằm trên tia đối của tia  $BA$ . Kẻ hai tiếp tuyến  $MC, MD$  với đường tròn ( $C, D$  là các tiếp điểm). Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ .
- a) Chứng minh rằng các điểm  $M, D, O, H$  cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Đoạn thẳng  $OM$  cắt đường tròn tại  $I$ . Chứng minh rằng  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $MCD$ .
- c) Đường thẳng qua  $O$  vuông góc với  $OM$  cắt các tia  $MC, MD$  theo thứ tự tại  $P$  và  $Q$ . Xác định vị trí của điểm  $M$  trên đường thẳng  $d$  sao cho diện tích tam giác  $MPQ$  đạt giá trị nhỏ nhất.
39. Cho đường tròn tâm  $O$  và đường tròn tâm  $I$  cố định cắt nhau tại hai điểm  $A$  và  $B$ . Biết rằng đường tròn  $(I)$  đi qua điểm  $O$ . Vẽ hai đường kính  $AE$  và  $BF$  của đường tròn  $(O)$ . Gọi  $C$  là một điểm di động trên cung  $EF$  của đường tròn  $(O)$  ( $\widehat{EF}$  không chứa điểm  $A$ ) với  $C$  khác  $E$  và  $F$ . Đường thẳng  $CO$  cắt đường tròn  $(O)$  và đường tròn  $(I)$  lần lượt tại  $K$  và  $D$  ( $K$  khác  $C$ ;  $D$  khác  $O$ ).
- a) Chứng minh rằng  $\widehat{CAD} + \widehat{OBK} = 180^\circ$ .
- b) Chứng minh  $K$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABD$ .
- c) Xác định vị trí của điểm  $C$  trên cung  $EF$  sao cho diện tích tứ giác  $ACBD$  lớn nhất.

# PHẦN BA. MỘT SỐ ĐỀ THAM KHẢO

## ĐỀ SỐ 1

**Bài 1.** Thu gọn các biểu thức sau:

a)  $A = (\sqrt{6} + 3)(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \frac{7 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$  ;

b)  $B = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 4}{5 - 2\sqrt{3}}} - \sqrt{\frac{3\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3} + 1}}$  ;

c)  $C = \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 1}$ .

**Bài 2.** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Tháng trước, hai tổ sản xuất được 800 chi tiết máy. Tháng này, tổ I vượt mức 9%, tổ II vượt mức 10% nên cả hai tổ đã sản xuất được 875 chi tiết máy. Hỏi tháng trước mỗi tổ đã sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy ?

**Bài 3.** Cho các đường thẳng  $(d_1) : y = (m - 1)x + 2$ ,

$$(d_2) : y = 3x - m.$$

- Tìm giá trị của  $m$  để  $(d_1) \parallel (d_2)$ .
- Tìm giá trị của  $m$  để  $(d_1)$  và  $(d_2)$  cắt nhau tại điểm  $M(5; 12)$ .
- Với giá trị vừa tìm được của  $m$  ở câu b) thì  $(d_1)$  và  $(d_2)$  lần lượt cắt trục hoành tại  $A$  và  $B$ . Tính diện tích tam giác  $MAB$ .

**Bài 4.** Cho nửa đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Tiếp tuyến tại  $C$  trên nửa đường tròn cắt hai tiếp tuyến  $Ax, By$  của nửa đường tròn lần lượt tại  $D$  và  $P$  ( $C$  khác  $A$  và  $B$ ).

- Chứng minh tam giác  $DOP$  vuông.
- Gọi  $E$  là giao điểm của đường thẳng  $BP$  và  $AC$ . Chứng minh rằng  $BP = PE$ .
- Chứng minh rằng  $BD$  vuông góc với  $OE$ .
- Gọi  $F$  là giao điểm của  $BD$  với nửa đường tròn  $(O; R)$ . Chứng minh  $EF$  là tiếp tuyến của nửa đường tròn đó.

**Bài 5.** Cho  $x$  không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x - 4\sqrt{x} + \frac{x + 16}{\sqrt{x + 3}} + 10.$$

## ĐỀ SỐ 2

**Bài 1.** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1}$ .

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh rằng  $P < \frac{1}{3}$ .

c) Tìm x để  $P = \frac{2}{7}$

**Bài 2.** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Quãng đường AB dài 60 km. Một ô tô chạy liên tục từ A đến B rồi lại chạy từ B về A hết tất cả 2 giờ 12 phút. Biết vận tốc lúc về nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 10 km/h. Tính vận tốc lúc đi và lúc về.

**Bài 3.** Cho đường thẳng (d) :  $y = (m + 2)x + m + 1$  và parabol (P):  $y = -x^2$ .

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì (d) luôn đi qua điểm M(-1; -1).

b) Tìm giá trị của m để (d) và (P) tiếp xúc với nhau. Tìm tọa độ của tiếp điểm.

c) Vẽ đường thẳng (d) và parabol (P) ứng với giá trị của m vừa tìm được ở câu b).

**Bài 4.** Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Lấy điểm H thuộc tia đối của tia BA, qua H dựng đường thẳng d vuông góc với AB. Lấy điểm C cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Vẽ một dây EF bất kì qua C, các tia AE, AF cắt đường thẳng d lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh tứ giác BEMH nội tiếp.

b) Chứng minh rằng  $AE \cdot AM = AF \cdot AN$ .

c) Chứng minh rằng khi EF thay đổi thì đường tròn ngoại tiếp  $\Delta AMN$  luôn đi qua một điểm cố định khác điểm A.

d) Cho biết AB = 4cm, HB = 1cm, BC = 1cm. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

**Bài 5.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng :

$$\sin A + \sin B + \sin C < 2(\cos A + \cos B + \cos C).$$



## ĐỀ SỐ 3

**Bài 1.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ .

- Rút gọn P.
- Cho  $y > 0$  và  $y = 4x$ . Tính giá trị của biểu thức P.
- Tìm x, y để  $P + \frac{1}{P} = 2$ .

**Bài 2.** Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

- $8x^2 + 2x - 1 = 0$ ;
- $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ ;
- $5x^2 - 2\sqrt{10}x + 2 = 0$  ;
- $$\begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ 3x - 2y = 10. \end{cases}$$

**Bài 3.** Cho hàm số  $y = (m - 2)x + 1$  có đồ thị là đường thẳng (d).

- Tìm các giá trị của m để hàm số đã cho là hàm số nghịch biến.
- Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua điểm M(2; 3).
- Xác định m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

**Bài 4.** Cho tam giác ABM cân tại M, nội tiếp đường tròn tâm O. Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho  $MC = MB$ . Nối AC cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D. Gọi E là điểm đối xứng của D qua A.

a) Chứng minh rằng:  $\widehat{BEC} = 2\widehat{ACB}$ .

b) Chứng minh rằng:  $CD \cdot CA = \frac{BC^2}{4}$ .

c) Các tia BE và MA cắt nhau tại F. Chứng minh  $AE = EF$  và  $BF = AC$ .

d) Tam giác ABM cân có thêm điều kiện gì để tứ giác MDFE là hình bình hành ?

**Bài 5.** Chứng minh rằng:  $\frac{a + b}{\sqrt{a(3a + b)} + \sqrt{b(3b + a)}} \geq \frac{1}{2}$  với a, b là các số dương.

## ĐỀ SỐ 4

**Bài 1.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) : \left( 1 - \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 1} \right)$ .

- Rút gọn P.
- Tính giá trị của P khi  $x = 13 - 4\sqrt{3}$ .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

**Bài 2.** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một ca nô chạy xuôi dòng và ngược dòng trên sông với vận tốc riêng không đổi. Nếu ca nô chạy xuôi dòng trong 2 giờ rồi ngược dòng trong 3 giờ thì được tổng cộng 195 km. Nếu ca nô chạy xuôi dòng trong 3 giờ rồi ngược dòng trong 2 giờ thì được tổng cộng 205 km. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.

**Bài 3.** Cho phương trình  $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$ . (1)

- Giải phương trình khi  $m = 3$ .
- Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
- Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn  $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$ .

**Bài 4.** Cho đường tròn (O) bán kính R và một dây BC cố định ( $BC < 2R$ ). Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ AC, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA ở I và cắt tia CM tại D.

- Chứng minh góc AMD bằng góc ABC và MA là tia phân giác của góc BMD.
- Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BCD$  và góc BDC có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
- Tia DA cắt BC ở E và cắt đường tròn (O) ở F, chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.
- Chứng minh tích  $\mathcal{P} = AE \cdot AF$  không đổi khi M di động. Tính  $\mathcal{P}$  theo bán kính R và góc  $ABC = \alpha$ .

**Bài 5.** Cho (P):  $y = -x^2$ . Đường thẳng  $y = m$  cắt (P) tại hai điểm A, B. Tìm m để tam giác AOB đều và tính diện tích tam giác ABO.

## ĐỀ SỐ 5

**Bài 1.** Cho biểu thức

$$P = \left[ \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3} + \frac{x^2 - x - 5}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)} \right] : \frac{x + 4\sqrt{x} + 4}{x + 5\sqrt{x} + 6}.$$

- Rút gọn P.
- Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $P < 0$ .
- Tìm các giá trị của x và y sao cho:  $P \cdot (x - 4) + 4y^2 - 4xy + 9 + |2x - y - 3| = 0$ .

**Bài 2.** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một tổ công nhân theo kế hoạch phải sản xuất 2160 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng do mỗi ngày tổ đó đã sản xuất vượt mức 8 sản phẩm nên đã hoàn thành kế hoạch sớm được 3 ngày. Tính năng xuất dự định theo kế hoạch.

**Bài 3.** Cho phương trình  $x^2 - (3m - 1)x + 2m^2 - m = 0$ .

- Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.
- Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của m để  $x_1^2 + x_2^2 = 2$ .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng  $x_1^2 + x_2^2$ .

**Bài 4.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính  $AB = 2R$  và C, D là hai điểm di động trên nửa đường tròn sao cho C thuộc cung AD và  $\widehat{COD} = 60^\circ$  (C khác A và D khác B). Gọi M là giao điểm của tia AC và BD, N là giao điểm của dây AD và BC. Gọi H là trung điểm của CD.

- Chứng minh tứ giác CMDN nội tiếp.
- Chứng minh tổng các khoảng cách từ A, B đến đường thẳng CD là không đổi.
- Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng H, I, O thẳng hàng và  $DI = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ .
- Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MCD theo R.

**Bài 5.** Cho x và y là hai số thực không âm thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 4$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A = \frac{xy}{x + y + 2}.$$

## ĐỀ SỐ 6

**Bài 1.** Cho biểu thức  $P = 3 \cdot \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)$ .

- Rút gọn P.
- Chứng minh  $P > 2$ .
- Tìm m để có x thỏa mãn  $P \cdot \sqrt{x} = m$ .

**Bài 2.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} mx - y = 2 & (1) \\ x + my = 5 & (2) \end{cases}$$

- Chứng tỏ hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất với mọi m.
- Giải hệ phương trình khi  $m = 2$ .
- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn  $x + y = 5$ .

**Bài 3.** Cho parabol (P) :  $y = \frac{1}{2}x^2$

và đường thẳng (d):  $y = x + 4$ .

- Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.
- Tính góc  $\alpha$  tạo bởi đường thẳng (d) và trục hoành.

**Bài 4.** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Điểm C thuộc nửa đường tròn (O) ( $CB < CA$ , C khác B). Gọi D là điểm chính giữa của cung AC, E là giao điểm của AD và BC.

- Chứng minh tam giác ABE cân tại B.
- Gọi F là điểm thuộc đường thẳng AC sao cho C là trung điểm của AF. Chứng minh  $\widehat{EFA} = \widehat{EBD}$ .
- Gọi H là giao điểm của AC và BD, EH cắt AB tại K, KC cắt EF tại I. Chứng minh rằng tứ giác EIBK nội tiếp.
- Chứng minh rằng  $\frac{HF}{BC} = \frac{EI}{BI} + \frac{EK}{BK}$ .

**Bài 5.** Giải phương trình  $10\sqrt{x^3 + 1} = 3(x^2 + 2)$ .

## ĐỀ SỐ 7

(Thi tuyển sinh lớp 10, THPT Thành phố Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

### Bài I (2,5 điểm).

1. Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 2}$ . Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 36$ .

2. Rút gọn biểu thức  $B = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} + \frac{4}{\sqrt{x} - 4} \right) : \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 2}$  (với  $x \geq 0, x \neq 16$ ).

3. Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức  $B(A - 1)$  là số nguyên.

### Bài II (2,0 điểm). Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai người cùng làm chung một công việc trong  $\frac{12}{5}$  giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc.

### Bài III (1,5 điểm).

1. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{6}{x} - \frac{2}{y} = 1. \end{cases}$$

2. Cho phương trình:  $x^2 - (4m - 1)x + 3m^2 - 2m = 0$  (ẩn x). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn điều kiện  $x_1^2 + x_2^2 = 7$ .

Bài IV (3,5 điểm). Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là một điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A và C), BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

1. Chứng minh tứ giác CBKH là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh  $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$ .

3. Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho  $BE = AM$ . Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C.

4. Gọi  $d$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại điểm  $A$ . Cho  $P$  là một điểm nằm trên  $d$  sao cho hai điểm  $P, C$  nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ  $AB$  và  $\frac{AP \cdot MB}{MA} = R$ . Chứng minh đường thẳng  $PB$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $HK$ .

**Bài V (0,5 điểm).** Với  $x, y$  là các số dương thỏa mãn điều kiện  $x \geq 2y$ , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $M = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ .

## ĐỀ SỐ 8

(Thi tuyển sinh lớp 10, THPT TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 - 2013)

**Câu 1 (2 điểm)** Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a)  $2x^2 - x - 3 = 0$ .

b) 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$$

c)  $x^4 + x^2 - 12 = 0$ .

d)  $x^2 - 2\sqrt{2}x - 7 = 0$ .

**Câu 2 (1,5 điểm)**

a) Vẽ đồ thị  $(P)$  của hàm số  $y = \frac{1}{4}x^2$  và đường thẳng  $(D): y = -\frac{1}{2}x + 2$  trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của  $(P)$  và  $(D)$  ở câu trên bằng phép tính.

**Câu 3 (1,5 điểm)** Thu gọn các biểu thức sau :

$$A = \frac{1}{x + \sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{x - \sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

$$B = (2 - \sqrt{3})\sqrt{26 + 15\sqrt{3}} - (2 + \sqrt{3})\sqrt{26 - 15\sqrt{3}}.$$

**Câu 4 (1,5 điểm)** Cho phương trình  $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$  ( $x$  là ẩn số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

b) Gọi  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình. Tìm  $m$  để biểu thức

$$M = \frac{-24}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

**Câu 5 (3,5 điểm)** Cho đường tròn (O) và M là điểm nằm ngoài đường tròn (O). Đường thẳng MO cắt (O) tại E và F (ME < MF). Vẽ cát tuyến MAB và tiếp tuyến MC của (O) (C là tiếp điểm, A nằm giữa hai điểm M và B, A và C nằm khác phía đối với đường thẳng MO).

- Chứng minh rằng  $MA \cdot MB = ME \cdot MF$ .
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm C lên đường thẳng MO. Chứng minh tứ giác AHOB nội tiếp.
- Trên nửa mặt phẳng bờ OM có chứa điểm C, vẽ nửa đường tròn đường kính MF; nửa đường tròn này cắt tiếp tuyến tại E của (O) ở K. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng CO và KF. Chứng minh rằng đường thẳng MS vuông góc với đường thẳng KC.
- Gọi P và Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác EFS và ABS và T là trung điểm của KS. Chứng minh ba điểm P, Q, T thẳng hàng.

## ĐỀ SỐ 9 5

*(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Đại học sư phạm Hà Nội, năm học 2012-2013, vòng 1)*

**Câu 1 (2 điểm).** Cho biểu thức:

$$P = \left( \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a + b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ với } a > b > 0.$$

- Rút gọn P.
- Biết  $a - b = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

**Câu 2 (2 điểm).** Trên quãng đường AB dài 210 km, tại cùng một thời điểm, một xe máy khởi hành từ A đi về B và một ô tô khởi hành từ B đi về A. Sau khi gặp nhau, xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A. Biết rằng xe máy và ô tô không thay đổi vận tốc trên suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và của ô tô.

**Câu 3 (2 điểm).** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P):  $y = -x^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx - m - 2$  (m là tham số).

- Chứng minh rằng khi m thay đổi, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm có hoành độ phân biệt  $x_1, x_2$ .
- Tìm m để  $|x_1 - x_2| = \sqrt{20}$ .

**Câu 4 (3 điểm).** Cho tam giác ABC. Đường tròn ( $\omega$ ) có tâm O và tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, AC tương ứng tại K, L. Tiếp tuyến (d) của đường tròn ( $\omega$ ) tại

điểm E thuộc cung nhỏ KL cắt các đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N. Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại Q.

a) Chứng minh rằng  $\widehat{MON} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ .

b) Chứng minh rằng các đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.

c) Chứng minh  $KQ \cdot PL = EM \cdot EN$ .

**Câu 5 (1 điểm).** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện  $\sqrt{xy}(x-y) = x+y$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x + y$ .

## ĐỀ SỐ 10

*(Tuyển sinh lớp 10 chuyên tỉnh Đồng Nai, năm học: 2012 - 2013, vòng 1)*

**Câu 1 (2,5 điểm)**

1) Giải các phương trình:

a)  $x^4 - x^2 - 20 = 0$ .

b)  $\sqrt{x+1} = x-1$ .

2) Giải hệ phương trình  $\begin{cases} |x| + |y-3| = 1 & (1) \\ y - |x| = 3 & (2) \end{cases}$

**Câu 2 (2,0 điểm)** Cho parabol  $y = x^2$  (P) và đường thẳng  $y = mx$  (d), với m là tham số.

1) Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 9.

2) Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm mà khoảng cách giữa hai điểm này bằng  $\sqrt{6}$ .

**Câu 3 (2,0 điểm)**

1) Tính  $P = \left( \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}$ .

2) Chứng minh  $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3$ , biết rằng  $a + b \geq 0$ .

**Câu 4 (3,5 điểm)** Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính AH, đường tròn này cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại D và E.

1) Chứng minh tứ giác BDEC là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh ba điểm D, O, E thẳng hàng.

3) Cho biết  $AB = 3\text{cm}$ ,  $BC = 5\text{cm}$ . Tính diện tích tứ giác BDEC.



# PHẦN BỐN. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

## ĐẠI SỐ

### Chuyên đề 1

1. Trục căn thức ở mẫu rồi tính :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{15(\sqrt{6} + 1)}{5} + \frac{8(\sqrt{6} - 2)}{2} + \frac{6(3 + \sqrt{6})}{3} - 9\sqrt{6} \\ & = 3\sqrt{6} + 3 + 4\sqrt{6} - 8 + 6 + 2\sqrt{6} - 9\sqrt{6} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} \\ & = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})}{2\sqrt{6}} \\ & = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{2. a) } \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2} - \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = (3 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{b) } \sqrt{(\sqrt{5} + 1) \cdot \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{3. a) } & (\sqrt[3]{2} + 1)^3 + (\sqrt[3]{2} - 1)^3 = (2 + 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 1) + (2 - 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} - 1) \\ & = 4 + 6\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } x = \frac{6(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{4})^3 + (\sqrt[3]{2})^3} = \frac{6(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})}{6} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2};$$

$$y = \frac{2(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{4})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} = \frac{2(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})}{2} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}.$$

$$A = x^3y - xy^3 = xy(x+y)(x-y) = (\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}) \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 2\sqrt[3]{2} = 8(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}).$$

$$4. P = \frac{2\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 1|}{(3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$\text{ĐKXĐ: } x \geq 0; x \neq \frac{1}{9}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Nếu } \sqrt{x} - 1 \geq 0 \text{ hay } x \geq 1 \text{ thì } P &= \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1}{(3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{3\sqrt{x} - 1}{(3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Nếu } \sqrt{x} - 1 < 0 \text{ hay } x < 1 \text{ thì } P &= \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{(3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1}{(3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{3\sqrt{x} - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Với } x = \frac{4}{9} < 1 \text{ thì } P = \frac{1}{3\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{3 \cdot \frac{2}{3} - 1} = 1.$$

$$\text{Với } x = \frac{9}{4} > 1 \text{ thì } P = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{2}{5}.$$

$$5. \text{ ĐKXĐ: } x \geq 0; x \neq 4.$$

$$a) P = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}.$$

$$b) x = \sqrt{(\sqrt{5} + 2)^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt{5} + 2 - (\sqrt{5} - 2) = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 2.$$

$$\text{Do đó } P = \frac{4 \cdot 2}{2 + 3} = \frac{8}{5}.$$

$$c) P = 2 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} = 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 6$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}.$$

6. ĐKXD :  $x \geq 0$  ;  $x \neq 4$  ;  $x \neq 9$ .

$$\text{a) } P = \frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}.$$

$$\text{b) } P > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ 3 - \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 9 \text{ và } x \neq 4.$$

$$\text{c) } P < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - 3}{3 - \sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} - 3 > 0 \text{ và } \sqrt{x} - 3 > 0 \\ 2\sqrt{x} - 3 < 0 \text{ và } \sqrt{x} - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > \frac{3}{2} \text{ và } \sqrt{x} > 3 \\ \sqrt{x} < \frac{3}{2} \text{ và } \sqrt{x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{9}{4} \text{ và } x > 9 \\ x < \frac{9}{4} \text{ và } x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9 \\ x < \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện xác định ta có } P < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9 \\ 0 \leq x < \frac{9}{4} \end{cases}$$

7. ĐKXD :  $x \geq 0$  ;  $x \neq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \dots = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } \sqrt{x} \geq 0 ; x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ nên } P \geq 0 \text{ do đó } |P| = P.$$

$$\text{Suy ra } |P| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow (2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ hoặc } x = 4.$$

$$\text{c) } P < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{x - \sqrt{x} + 1} < 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng (vì  $x \neq 1$ ) nên  $P < 1$ .

8. ĐKXD :  $x \geq 0 ; x \neq 1$ .

$$\text{a) } P = \frac{\sqrt{x} + 2 + x - \sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} : \frac{x - 1 - x + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$P = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1}.$$

$$\text{b) } P = \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{9}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 1 + \frac{9}{\sqrt{x} + 1}$$

$$P = \sqrt{x} + 1 + \frac{9}{\sqrt{x} + 1} - 2$$

$$P \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} + 1) \cdot \frac{9}{\sqrt{x} + 1}} - 2 = 6 - 2 = 4.$$

$$\text{Vậy min } P = 4 \text{ khi } \sqrt{x} + 1 = \frac{9}{\sqrt{x} + 1} \text{ hay } (\sqrt{x} + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn ĐKXD).}$$

*Lưu ý* : Phương pháp tìm giá trị nhỏ nhất của P trong câu này là dùng bất đẳng thức Cô-si (xem chuyên đề 6).

$$\text{c) } P \cdot \frac{x - 1}{x^2 + 8x} = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x(x + 8)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}.$$

Điều kiện bổ sung là  $x \neq 0$ .

$$\text{Ta có P. } \frac{x-1}{x^2+8x} < -2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x} < -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x} + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x + \sqrt{x} - 1}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{x} < 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1 < 0 \text{ (vì } \sqrt{x}+1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{4}. \text{ Kết hợp các điều kiện ta có } 0 < x < \frac{1}{4}.$$

## Chuyên đề 2

9. a) Ta có  $2x - 5y = 3$  suy ra  $x = \frac{5y+3}{2}$ .

Nghiệm tổng quát của phương trình (1) là :

$$(I) \begin{cases} x = \frac{5t+3}{2} \\ y = t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Muốn có một nghiệm cụ thể ta cho  $t$  một giá trị nào đó rồi thay vào (I).

b) Tìm nghiệm nguyên của (1)

$$\text{Ta có } 2x - 5y = 3 \text{ suy ra } x = \frac{5y+3}{2} = \frac{4y+y+3}{2} = 2y + \frac{y+3}{2}.$$

Muốn có giá trị nguyên của  $x$  thì ta phải có

$$\frac{y+3}{2} = t \text{ (} t \in \mathbb{Z}\text{)}.$$

$$\text{Suy ra } y = 2t - 3 \text{ (} t \in \mathbb{Z}\text{)}.$$

$$\text{Khi đó } x = 2(2t - 3) + t = 5t - 6.$$

Do đó công thức nghiệm nguyên của (1) là :

$$\begin{cases} x = 5t - 6 \\ y = 2t - 3 \end{cases} \text{ (} t \in \mathbb{Z}\text{)}.$$

10. Ta có  $|2x + 7y - 17| \geq 0$  ;  $(5x - 3y + 19)^2 \geq 0$

mà  $|2x + 7y - 17| + (5x - 3y + 19)^2 = 0$  nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + 7y - 17 = 0 \\ 5x - 3y + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3. \end{cases}$$

11. Vì  $x = 2$  là nghiệm của (1) nên  $4 + (2a - 5) \cdot 2 - 3b = 0$  hay  $4a - 3b = 6$ .

Vì  $x = -3$  là nghiệm của (1) nên  $9 + (2a - 5) \cdot (-3) - 3b = 0$  hay  $6a + 3b = 24$ .

Do đó ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4a - 3b = 6 \\ 6a + 3b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2. \end{cases}$$

12. ĐK :  $x \neq \pm y$ .

$$\text{Đặt (I) } \begin{cases} \frac{1}{x+y} = a \\ \frac{1}{x-y} = b \end{cases} \text{ ta được } \begin{cases} 27a + 21b = 2 \\ 81a - 105b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{27} \\ b = \frac{1}{21} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{27} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 27 \\ x-y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

13.

• Nếu  $y \geq 2$  thì hệ phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{cases} 3x - (y - 2) = 3 \\ 6x + 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x + 5y = 7. \end{cases}$$

Giải hệ này được  $y = \frac{9}{7} < 2$  (loại).

• Nếu  $y < 2$  thì hệ phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{cases} 3x + y - 2 = 3 \\ 6x + 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

14. a) Thay  $x = 4$  vào hệ phương trình đã cho ta được :

$$\begin{cases} 12 + my = 10 \\ 4 - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ y = -1. \end{cases}$$

Vậy khi  $m = 2$  thì hệ phương trình đã cho có nghiệm  $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1. \end{cases}$

b) Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi :

$$\frac{3}{1} \neq \frac{m}{-1} \text{ hay } m \neq -3.$$

Xét hệ phương trình :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 32 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1. \end{cases}$$

Thay  $x = 6$  ;  $y = 1$  vào phương trình  $3x + my = 10$  ta được

$$3.6 + m = 10 \text{ suy ra } m = -8 \text{ (thỏa mãn điều kiện } m \neq -3).$$

Vậy khi  $m = -8$  thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $(6 ; 1)$  thỏa mãn điều kiện  $5x + 2y = 32$ .

**15. ĐK :**  $xyz \neq 0$

Viết hệ đã cho dưới dạng

$$(I) \begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6} & (1) \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3} & (2) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} & (3) \end{cases}$$

---

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{11}{3}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6} \quad (4)$$

Trừ từng vế của phương trình (4) lần lượt với từng vế của hệ (I) ta được

$$\begin{cases} \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1. \end{cases}$$

### Chuyên đề 3

16. a) Đặt  $x^2 + x - 1 = t$  thì  $x^2 + x + 2 = t + 3$

Phương trình đã cho trở thành  $t(t + 3) = 40$

hay  $t^2 + 3t - 40 = 0$  có nghiệm  $t_1 = 5$ ;  $t_2 = -8$

• Với  $t_1 = 5$  thì  $x^2 + x - 1 = 5$  hay  $x^2 + x - 6 = 0$  có nghiệm  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -3$ .

• Với  $t_2 = -8$  thì  $x^2 + x - 1 = -8$  hay  $x^2 + x + 7 = 0$ , vô nghiệm.

Vậy  $S = \{-3; 2\}$ .

b) ĐKXD:  $x \neq 0$ .

Đặt  $x + \frac{1}{x} = t$  thì  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$  hay  $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ .

Phương trình đã cho trở thành :

$$t^2 - 2 + 2t - 6 = 0 \text{ hay } t^2 + 2t - 8 = 0 \text{ có nghiệm } t_1 = 2; t_2 = -4.$$

• Với  $t_1 = 2$  thì  $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$  có nghiệm  $x = 1$ .

• Với  $t_2 = -4$  thì  $x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$  có nghiệm

$$x_1 = -2 + \sqrt{3}; x_2 = -2 - \sqrt{3}.$$

Vậy  $S = \{1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\}$ .

17. a) Thay  $x = 3$  vào phương trình (1) ta được

$$9 + 3(m - 5) - 3(m - 2) = 0 \text{ hay } 0 \cdot m = 0 \text{ đúng với mọi } m.$$

Vậy  $x = 3$  là một nghiệm của (1) với mọi giá trị của  $m$ .

b)  $\Delta = (m - 5)^2 + 12(m - 2) = (m + 1)^2$ .

Phương trình (1) có nghiệm kép  $\Leftrightarrow (m + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ .

c) Thay  $x = 1 - \sqrt{2}$  vào phương trình (1) ta được

$$(1 - \sqrt{2})^2 + (m - 5)(1 - \sqrt{2}) - 3(m - 2) = 0$$

$$\text{hay } (2 + \sqrt{2})m = 4 + 3\sqrt{2}, \text{ dẫn tới } m = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$



18. a) Phương trình  $x^2 + 5x + 6 = 0$  có  $\Delta = 1 > 0$  nên có hai nghiệm phân biệt. Theo hệ thức Vi-ét ta có :

$$x_1 + x_2 = -5 ; x_1 x_2 = 6$$

Do đó  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-5)^2 - 12 = 13.$

Ta có  $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (-5)^2 - 24 = 1.$

Suy ra  $x_1 - x_2 = \pm 1.$

Vậy  $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \pm 1 \cdot (-5) = \pm 5.$

b) Phương trình  $7x^2 - x + 2 = 0$  có  $\Delta < 0$  nên không có nghiệm.

Do đó không thể tính được giá trị của các biểu thức đã cho.

19. a) Ta có  $a = 1 + \sqrt{2} > 0$  ;  $c = 1 - \sqrt{2} < 0$  nên phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu (hơn nữa vì  $S < 0$  nên nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn).

b)  $\Delta' = 11 > 0$  ;  $P = \frac{1}{5} > 0$  ;  $S = \frac{-8}{5} < 0$  nên phương trình (2) có hai nghiệm âm phân biệt.

c)  $\Delta' = 0$  ;  $S = 2\sqrt{2} > 0$  nên phương trình (3) có nghiệm kép dương.

20. a) Nếu  $m = -4$  thì phương trình trở thành  $14x - 2 = 0$ , có nghiệm  $x = \frac{1}{7}.$

Nếu  $m \neq -4$  thì (1) là phương trình bậc hai.

$$\Delta' = m^2 - 4m + 17 = (m - 2)^2 + 13 > 0 \text{ với mọi } m.$$

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi  $m.$

b) Phương trình (1) có nghiệm  $x = 1$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 0$$

$$\Leftrightarrow m + 4 - 2(m - 3) - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 8.$$

$$\text{Khi đó } x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{m + 4} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}.$$

21. a)  $\Delta' = (m + 1)^2 - 2m = m^2 + 1 > 0$  suy ra đpcm.

b)  $x_1 + x_2 = -2(m + 1) = -2m - 2$  ;  $x_1 x_2 = 2m.$

Do đó  $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -2$  (không phụ thuộc  $m$ )

Suy ra  $x_2 + x_1 x_2 = -(2 + x_1).$

$$x_2(1 + x_1) = -(2 + x_1)$$

$$x_2 = \frac{-(2 + x_1)}{1 + x_1} \quad (\text{với } x_1 \neq -1).$$

$$c) A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = [-2(m + 1)]^2 - 4m$$

$$A = 4(m^2 + m + 1) = 4 \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right]$$

$$A = 4 \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 + 3 \geq 3.$$

Do đó  $\min A = 3$  khi  $m = -\frac{1}{2}$ .

22. a) • Nếu  $m = 0$  thì phương trình (1) trở thành  $-5x - 2 = 0$  có nghiệm  $x = -\frac{2}{5}$ .

• Nếu  $m \neq 0$  thì (1) là phương trình bậc hai,

$$\Delta = (2m - 5)^2 - 4m(m - 2) = -12m + 25.$$

Phương trình (1) có nghiệm  $\Leftrightarrow -12m + 25 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{12}$ .

Kết hợp cả hai trường hợp ta được nếu  $m \leq \frac{25}{12}$  thì (1) có nghiệm.

b) Điều kiện để (1) có hai nghiệm phân biệt là  $m < \frac{25}{12}$  và  $m \neq 0$ .

Theo hệ thức Vi-ét ta có  $x_1 + x_2 = \frac{5 - 2m}{m}$ ;  $x_1x_2 = \frac{m - 2}{m}$ .

$$\text{Do đó } (6x_1 - 1)(6x_2 - 1) = -2$$

$$\Leftrightarrow 36x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{36(m - 2)}{m} - \frac{6(5 - 2m)}{m} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 51m = 102 \Leftrightarrow m = 2 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}).$$

$$23. a) \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 = 4x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Do đó  $m = 16$ .

b) Điều kiện để phương trình có nghiệm là  $\Delta = 25 - m \geq 0$  hay  $m \leq 25$ .

Ta có  $x_1^3 + x_2^3 = 370$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 370$$

$$\Leftrightarrow 10^3 - 3.m.10 = 370$$

$$\Leftrightarrow m = 21 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

24. Ta thấy  $a - b + c = 1 + 2m - 2m + 1 = 0$

nên phương trình đã cho có một nghiệm là  $-1$

• Nếu  $x_1 = -1$  thì  $x_2 = 2m + 1$ .

Theo đề bài ta có  $x_1 + 3x_2 = 14$

$$\Leftrightarrow -1 + 3(2m + 1) = 14 \Leftrightarrow m = 2.$$

• Nếu  $x_2 = -1$  thì  $x_1 = 2m + 1$

Theo đề bài ta có  $x_1 + 3x_2 = 14 \Leftrightarrow 2m + 1 - 3 = 14 \Leftrightarrow m = 8$ .

Vậy  $m \in \{2; 8\}$ .

25. a)  $\Delta' = [-(m - 1)]^2 - (m^2 + 4m + 13) = -6m - 12$ .

Phương trình (1) có nghiệm  $\Leftrightarrow -6m - 12 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$ .

b) Phương trình (1) có hai nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ m < -2 \\ m^2 + 4m + 13 > 0 \\ 2(m - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ (m + 2)^2 + 9 > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

### Chuyên đề 4

26. Gọi quãng đường AM là  $x$  km ( $x > 0$ ).

Gọi quãng đường MB là  $y$  km ( $y > 0$ ).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{9} + \frac{y}{18} = 2 \\ \frac{x}{18} + \frac{y}{9} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 24 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy quãng đường AM dài 6 km ; quãng đường MB dài 24 km.

27. Thời gian ô tô đã đi cho đến khi đuổi kịp xe máy là :

$$11 - 7 = 4 \text{ (giờ)}$$

Thời gian xe máy đã đi cho đến khi ô tô đuổi kịp là :

$$4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{ (giờ)}.$$

Gọi vận tốc ô tô là  $x$  (km/h) ( $x > 0$ ).

Gọi vận tốc xe máy là  $y$  (km/h) ( $y > 0$ ).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ 4x - \frac{9}{2}y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \text{ (thỏa mãn ĐK)}. \end{cases}$$

Vậy vận tốc ô tô là 50 km/h ; vận tốc xe máy là 40 km/h.

*Lưu ý* : Bài này có thể giải bằng cách chọn một ẩn số.

28. Gọi vận tốc riêng của ca nô là  $x$  (km/h).

Gọi vận tốc dòng nước là  $y$  (km/h) ( $x > y > 0$ ).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x + y) + 2(x - y) = 126 \\ 1,5(x + y) + 1,5(x - y) = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 43 \\ y = 3 \text{ (thỏa mãn ĐK)}. \end{cases}$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 43 km/h.

Vận tốc dòng nước là 3 km/h.

29. Gọi thời gian xe I đã đi là  $x$  (giờ) ( $x > 0$ ).

Suy ra thời gian xe II đã đi là  $x + \frac{1}{3}$  hay  $\frac{3x + 1}{3}$  (giờ).

Dẫn tới phương trình :

$$\frac{150}{x} - \frac{150}{\frac{3x + 1}{3}} = 5 \Leftrightarrow \frac{150}{x} - \frac{450}{3x + 1} = 5$$

Tìm được nghiệm  $x_1 = 3$  (thỏa mãn ĐK) ;  $x_2 = -\frac{10}{3}$  (loại).

Vậy xe I đã đi trong 3 giờ ; xe II đã đi trong 3 giờ 20 phút.

30. Gọi năng suất dự kiến là  $x$  (sản phẩm/ngày) ( $x$  nguyên dương).

$$\text{Đẫn tới phương trình : } \frac{180}{x} - \frac{190}{x+8} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 18x - 1440 = 0, \text{ có nghiệm } x_1 = 30 \text{ (thỏa mãn ĐK)} ; x_2 = -48 \text{ (loại)}.$$

Vậy năng suất dự kiến là 30 sản phẩm/ngày.

31. Gọi năng suất theo kế hoạch của mỗi tổ là  $x$  (sản phẩm/ngày) ( $x$  : nguyên dương).

Gọi thời gian mỗi tổ phải làm theo kế hoạch là  $y$  (ngày) ( $y > 3$ ).

Suy ra số sản phẩm mỗi tổ phải làm là  $xy$  (sản phẩm).

Đẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x+4)(y-3) = xy + 58 \\ (x+3)(y-2) = xy + 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 4y = 70 \\ -2x + 3y = 60. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \text{ (thỏa mãn ĐK)}. \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch, mỗi tổ phải sản xuất là :

$$30 \times 40 = 1200 \text{ (sản phẩm)}.$$

32. Gọi thời gian đội I làm một mình xong công việc là  $x$  giờ ( $x > 4$ ).

Gọi thời gian đội II làm một mình xong công việc là  $y$  giờ ( $y > 4$ ).

Đẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \text{ (thỏa mãn ĐK)}. \end{cases}$$

Vậy đội I làm một mình xong công việc trong 6 giờ ;

Đội II làm một mình xong công việc trong 12 giờ.

33. Hai vòi chảy  $\frac{2}{5}$  bể hết 45 phút =  $\frac{3}{4}$  giờ.

Vậy hai vòi chảy đầy bể hết  $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{15}{8}$  (giờ).

Gọi thời gian để vòi I chảy một mình đầy bể là  $x$  giờ ( $x > \frac{15}{8}$ ), dẫn tới phương trình :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow 4x^2 - 7x - 15 = 0,$$

có nghiệm  $x_1 = 3$  (thỏa mãn ĐK);  $x_2 = -\frac{5}{4}$  (loại).

Vòi I chảy đầy bể trong 3 giờ;

Vòi II chảy đầy bể trong 5 giờ.

**34.** Gọi chữ số hàng chục là  $x$  ( $x \in \mathbb{N}; 0 < x \leq 9$ )

Gọi chữ số hàng đơn vị là  $y$  ( $y \in \mathbb{N}; 0 \leq y \leq 9$ ).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 100x + y = 9(10x + y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ 10x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy số phải tìm là 45.

**35.** Gọi chữ số hàng chục là  $x$  ( $x \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 9$ ), chữ số hàng đơn vị là  $y$  ( $y \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 9$ ).

Dẫn tới hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 10x + y - 2xy + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12 & (1) \\ 2x^2 - 15x + 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải phương trình (2) được  $x_1 = 7$  (thỏa mãn ĐK);  $x_2 = \frac{1}{2}$  (loại).

Suy ra  $y_1 = 12 - x_1 = 5$ .

Vậy số phải tìm là 75.

**36.** Gọi số sản phẩm tổ I phải sản xuất theo kế hoạch là  $x$  ( $x$  nguyên, dương).

Gọi số sản phẩm tổ II phải sản xuất theo kế hoạch là  $y$  ( $y$  nguyên, dương).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{8}{100}x + \frac{6}{100}y = 69 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1000 \\ 8x + 6y = 6900 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 450 \\ y = 550 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy theo kế hoạch tổ I phải sản xuất 450 sản phẩm ;

Tổ hai phải sản xuất 550 sản phẩm.

37. Gọi số học sinh tiên tiến là  $x$  ( $x$  nguyên, dương).

Gọi số vở để làm phần thưởng là  $y$  ( $y$  nguyên, dương).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = 12x + 10 \\ y = 13x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 250 \text{ (thỏa mãn ĐK)}. \end{cases}$$

Vậy lớp đó có 20 học sinh tiên tiến và có 250 quyển vở để làm phần thưởng.

38. Gọi số hàng ghế lúc đầu là  $x$  ( $x$  nguyên dương,  $x < 25$ ).

Dẫn tới phương trình

$$\frac{418}{x+2} - \frac{360}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 56x + 720 = 0,$$

có nghiệm  $x_1 = 20$  (thỏa mãn ĐK) ;  $x_2 = 36$  (loại).

Vậy lúc đầu có 20 hàng ghế.

39. Gọi số sản phẩm phân xưởng I làm trong một ngày là  $x$  ( $x$  nguyên dương).

Gọi số sản phẩm phân xưởng II làm trong một ngày là  $y$  ( $y$  nguyên dương).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} 10x + 12y = 940 \\ 4x - 3y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 45 \text{ (thỏa mãn ĐK)}. \end{cases}$$

Số sản phẩm phân xưởng I làm trong 10 ngày là

$$40 \times 10 = 400 \text{ (sản phẩm)}.$$

Số sản phẩm phân xưởng II làm trong 12 ngày là

$$45 \times 12 = 540 \text{ (sản phẩm)}.$$

## Chuyên đề 5

40. a) Vì đồ thị của hàm số  $y = ax + b$  song song với đường thẳng  $y = \frac{2}{3}x$  nên

$$a = \frac{2}{3}.$$

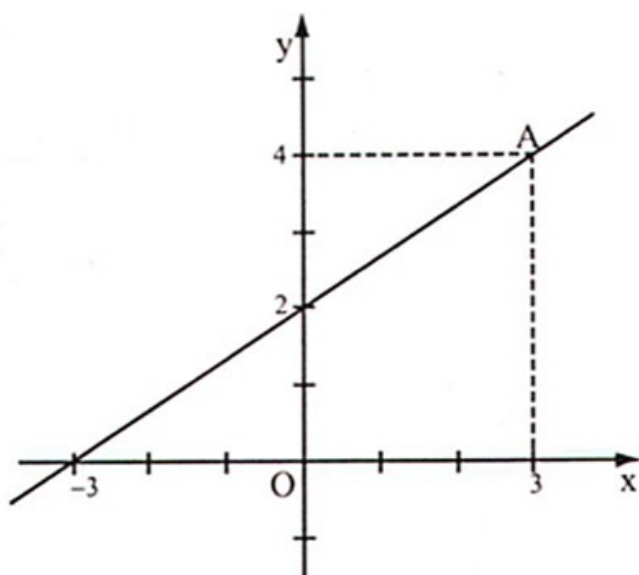
Vì đồ thị của hàm số  $y = \frac{2}{3}x + b$  đi qua điểm  $A(3 ; 4)$  nên  $4 = \frac{2}{3} \cdot 3 + b$

$$\Rightarrow b = 2.$$

Vậy hàm số cần xác định là

$$y = \frac{2}{3}x + 2.$$

b) Đồ thị : xem hình bên.



41. a) Vì  $a \neq 0$  nên (d) cắt trục tung tại P có tung độ là  $-2$  và cắt trục hoành tại điểm Q có hoành độ là  $\frac{2}{a}$ .

Xét  $\Delta OPQ$  vuông tại O có  $\widehat{Q_1} = \alpha = 45^\circ$  nên tam giác này vuông cân.

Suy ra  $OQ = OP = |-2| = 2$ .

Do đó ta tìm được hoành độ của điểm Q :

$$\frac{2}{a} = 2 \Rightarrow a = 1.$$

b) Vẽ  $OH \perp PQ$ , ta có  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2}$

$$\text{hay } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}$$

$$OH^2 = 2 \Rightarrow OH = \sqrt{2}.$$

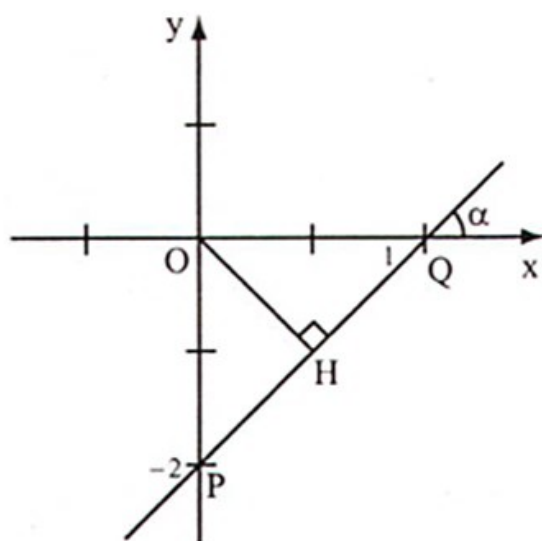
42. a) Đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  đi qua  $A(4 ; 4)$  nên  $4 = a \cdot 4^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$ .

Vậy hàm số đã cho là  $y = \frac{1}{4}x^2$ .

b) Gọi đường thẳng (d) đi qua A và tiếp xúc với (P) tại A là  $y = ax + b$ . (1)

Vì (d) đi qua  $A(4 ; 4)$  nên  $4 = a \cdot 4 + b \Rightarrow b = -4a + 4$ .

Do đó (d) là đường thẳng  $y = ax - 4a + 4$ .





Xét phương trình hoành độ điểm chung của (P) và (d) :

$$\frac{1}{4}x^2 = ax - 4a + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4ax + 16a - 16 = 0,$$

$$\Delta' = 4a^2 - 16a + 16 = 4(a - 2)^2.$$

(P) và (d) tiếp xúc  $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow a = 2$ .

Vậy phương trình của đường thẳng (d) là  $y = 2x - 4$ . (Học sinh tự vẽ hình).

43. a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0, \text{ có hai nghiệm } x_1 = 1; x_2 = -2.$$

Vậy (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.

Vì  $x_1 = 1 > 0$ ;  $x_2 = -2 < 0$  nên hai điểm A và B nằm về hai phía của trục tung.

b) Với  $x_1 = 1$  ta có  $y_1 = 1 \Rightarrow A(1; 1)$ .

Với  $x_2 = -2$  ta có  $y_2 = 4 \Rightarrow B(-2; 4)$ .

Ta có

$$AB^2 = [1 - (-2)]^2 + (1 - 4)^2 = 18.$$

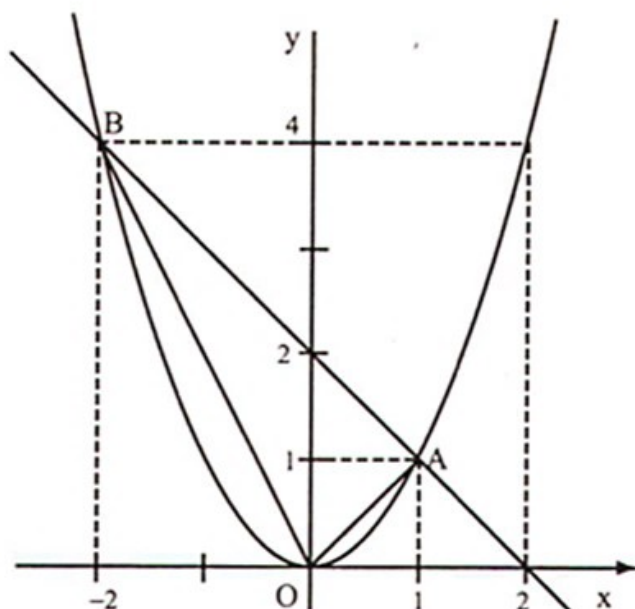
$$OA^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

$$OB^2 = 2^2 + 4^2 = 20.$$

$$\text{Vậy } OB^2 = AB^2 + AO^2$$

$\Rightarrow \Delta AOB$  vuông tại A.

$$\begin{aligned} S_{AOB} &= \frac{OA \cdot AB}{2} \\ &= \frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}}{2} = 3 \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$



44. a) Ta viết (d) dưới dạng  $y = -ax + 1$ .

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$\frac{1}{2}x^2 = -ax + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2ax - 2 = 0$$

$$\Delta' = a^2 + 2 > 0.$$

Do đó (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Ta có

$$x_A = -a - \sqrt{a^2 + 2}; \quad y_A = -ax_A + 1$$

$$x_B = -a + \sqrt{a^2 + 2}; y_B = -ax_B + 1.$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= \left(2\sqrt{a^2 + 2}\right)^2 + [-a(x_B - x_A)]^2 \\ &= 4(a^2 + 2) + a^2 \cdot 4(a^2 + 2) \\ &= 4a^4 + 12a^2 + 8 \geq 8. \end{aligned}$$

Vậy  $\min AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$  (khi  $a = 0$ ).

### Chuyên đề 6

45. a) Bình phương hai vế (do hai vế đều dương) ta được

$$x \geq x + 1 - 2\sqrt{x + 1} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x + 1} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + 1} \geq 1 \Leftrightarrow x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ (đúng).}$$

b) Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$x + 5 > 2\sqrt{x + 4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 > 4(x + 4) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 > 0 \text{ (đúng vì } x \geq 0\text{).}$$

46. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm.

a) Ta có:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Nhân từng vế các bất đẳng thức trên ta được :

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = 8abc.$$

(dấu "=" xảy ra khi  $a = b = c$ ).

b) 
$$\frac{a}{2b + 3c} + \frac{2b + 3c}{4a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{2b + 3c} \cdot \frac{2b + 3c}{4a}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $2a = 2b + 3c$ .

47. Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{200}}{200} \\ &= \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} \right)}_{100 \text{ số hạng}} + \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{101}} + \frac{1}{\sqrt{102}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{200}} \right)}_{100 \text{ số hạng}} \\ &> \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{100}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} \right)}_{100 \text{ số hạng}} + \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{200}} + \frac{1}{\sqrt{200}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{200}} \right)}_{100 \text{ số hạng}} \\ &= \frac{100}{\sqrt{100}} + \frac{100}{\sqrt{200}} = 10 + 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

48. Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} > \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}}$$

.....

$$\frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} > \frac{1}{\sqrt{80} + \sqrt{81}}.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được :

$$S > \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80} + \sqrt{81}} = S_1.$$

Ta có  $S > S_1$ .

Suy ra  $2S > S_1 + S$  hay

$$2S > \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{80} + \sqrt{81}}$$

$$2S > \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{80} - \sqrt{79} + \sqrt{81} - \sqrt{80}$$

$$2S > \sqrt{81} - \sqrt{1} = 8.$$

Do đó  $S > 4$ .

49. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có :

$$a\sqrt{b-1} = a\sqrt{(b-1).1} \leq a \cdot \frac{b-1+1}{2} = \frac{ab}{2}$$

$$b\sqrt{a-1} = b\sqrt{(a-1).1} \leq b \cdot \frac{a-1+1}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được :

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab.$$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} b-1=1 \\ a-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2.$

50. Chia cả hai vế của bất đẳng thức cho  $\sqrt{ab} > 0$  ta được :

$$\frac{\sqrt{c(a-c)}}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{c(b-c)}}{\sqrt{ab}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a-c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{b-c}{b}} \leq 1$$

Ta có  $\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a-c}{a}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{c}{b} + \frac{a-c}{a} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c}{b} - \frac{c}{a} \right)$

$$\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{b-c}{b}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} + \frac{b-c}{b} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c}{a} - \frac{c}{b} \right).$$

Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a-c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{b-c}{b}} \leq \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $\frac{c}{b} = \frac{a-c}{a}$  và  $\frac{c}{a} = \frac{b-c}{b} \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}.$

51. Ta có :

$$x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 > 0,$$

$$x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3 > 0,$$

$$x^2 - 3x + 6 = \frac{(x^2 - 2x + 5) + (x^2 - 4x + 7)}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta được

$$\sqrt{(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 4x + 7)} \leq x^2 - 3x + 6.$$

Nghiệm của phương trình (1) chính là giá trị của  $x$  để dấu "=" xảy ra.

Trong bất đẳng thức trên, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$x^2 - 2x + 5 = x^2 - 4x + 7 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là  $x = 1$ .

## Chuyên đề 7

52. Giải bất phương trình (1) được  $x > \frac{8}{11}$ .

Giải bất phương trình (2) được  $x < 3$ .

Vậy  $\frac{8}{11} < x < 3$ . Vì  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in \{1; 2\}$ .

53. Đưa bất phương trình đã cho về dạng

$$(5m - 1)x \geq 2(5m - 1).$$

- Nếu  $m \geq \frac{1}{5}$  thì  $x \geq 2$ ;
- Nếu  $m < \frac{1}{5}$  thì  $x < 2$ ;
- Nếu  $m = \frac{1}{5}$  thì  $0x \geq 0$ , nghiệm đúng với mọi  $x$ .

54. a) Khi  $m = \sqrt{5}$  thì (1) là  $2\sqrt{5}x - 19 > x$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{5} - 1)x > 19 \Leftrightarrow x > \frac{19}{2\sqrt{5} - 1} = 2\sqrt{5} + 1.$$

b)  $2mx - 19 > x$  (1)  $\Leftrightarrow (2m - 1)x > 19$  (\*)

- Nếu  $2m - 1 \leq 0$  hay  $m \leq \frac{1}{2}$  thì (\*) không thỏa mãn với mọi  $x > 1$ .
- Nếu  $2m - 1 > 0$  hay  $m > \frac{1}{2}$  thì  $x > \frac{19}{2m - 1}$ .

Đặt  $\frac{19}{2m - 1} = x_0$ .

Để (1) nhận mọi giá trị  $x > 1$  là nghiệm thì  $x_0 \leq 1$ .

Do đó ta có hệ :

$$\begin{cases} 2m - 1 > 0 \\ \frac{19}{2m - 1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 10.$$

Vậy với  $m \geq 10$  thì (1) nhận mọi giá trị  $x > 1$  là nghiệm.

55. a) A có nghĩa  $\Leftrightarrow 25 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$ .

b) B có nghĩa  $\Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3. \end{cases}$

c) C có nghĩa  $\Leftrightarrow$  A và B đều có nghĩa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x < 5 \\ x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \text{ và } x \geq 3 \\ -5 \leq x \leq 5 \text{ và } x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ -5 \leq x \leq -3. \end{cases}$$

56. a) ĐK :  $x \neq \frac{1}{3}$ .

$$\frac{6x + 1}{3x - 1} < 2 \Leftrightarrow \frac{6x + 1}{3x - 1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{3x - 1} < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}.$$

b) ĐK :  $x \neq 4$ .

$$\frac{4x + 5}{x - 4} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4x + 5}{x - 4} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x + 9}{x - 4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 9 \geq 0 \text{ và } x - 4 < 0 \\ 3x + 9 \leq 0 \text{ và } x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \text{ và } x < 4 \\ x \leq -3 \text{ và } x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < 4.$$

57. a)  $\frac{1}{4} < x < 1$ .

b)  $|5x + 7| < 3x - 1 \Leftrightarrow 1 - 3x < 5x + 7 < 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > -\frac{3}{4} \end{cases}$  (vô nghiệm).

c)  $|2x - 5| > x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 > x - 1 \\ 2x - 5 < 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 2. \end{cases}$

d) Bình phương hai vế được :

$$x^2 - 8x + 16 > 4x^2 + 4x + 1. \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 5) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < 1.$$

58. a) ĐK :  $x \geq \frac{5}{7}$       ĐS :  $\frac{5}{7} \leq x < 3$ .

b)  $\sqrt{(5x - 2)^2} > 4x + 1 \Leftrightarrow |5x - 2| > 4x + 1.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2 > 4x + 1 \\ 5x - 2 < -4x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < \frac{1}{9} \end{cases}.$$

c) ĐK :  $x(x + 6) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -6. \end{cases}$

Khi đó

$$x^2 + 6x > 40 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 40 > 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 10) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -10 \text{ (thỏa mãn ĐK).} \end{cases}$$

### Chuyên đề 8

59. a)  $A = -3\left(x^2 + 2x - \frac{2}{3}\right) = -3(x + 1)^2 + 5 \leq 5.$

Vậy max  $A = 5$  khi và chỉ khi  $x = -1$ .

b)  $B = \frac{23}{4x^2 - 5x + 3} = \frac{23}{4\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{23}{16}} \leq \frac{23}{\frac{23}{16}} = 16.$

Vậy max  $B = 16$  khi và chỉ khi  $x = \frac{5}{8}$ .

c) Ta có  $\sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \geq \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$

Do đó  $-\sqrt{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$  suy ra  $\max C = -\frac{1}{2}$  khi và chỉ khi  $x = \frac{1}{4}$ .

60. Xét biểu thức

$$\frac{3x + \sqrt{x} + 6}{\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} + 1 \geq 2 \cdot \sqrt{3\sqrt{x} \cdot \frac{6}{\sqrt{x}}} + 1 = 6\sqrt{2} + 1.$$

$$\text{Do đó } A = -\frac{3x + \sqrt{x} + 6}{\sqrt{x}} \leq -(6\sqrt{2} + 1).$$

$$\text{Vậy } \max A = -(6\sqrt{2} + 1) \text{ khi } 3\sqrt{x} = \frac{6}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 2.$$

61. Coi (1) như là phương trình bậc hai ẩn  $x$ , tham số  $y$ .

Nếu tồn tại cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn (1) thì (1) phải có nghiệm.

$$\text{Do đó } \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 36 - 2(-y + 19) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1.$$

$$\text{Vậy } \min y = 1 \text{ khi (1) có nghiệm kép } x = \frac{6}{2} = 3.$$

Cặp số cần tìm là  $(3; 1)$ .

62. Gọi  $a$  là một giá trị của  $P$ . Biểu thức  $P$  nhận giá trị  $a$  khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm :

$$\frac{2x}{x^2 - 2x + 4} = a \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow ax^2 - 2(a+1)x + 4a = 0 \quad (2)$$

• Nếu  $a = 0$  thì (2) là  $-2x = 0$  có nghiệm  $x = 0$ .

• Nếu  $a \neq 0$  thì (2) là phương trình bậc hai.

$$\text{Xét } \Delta' = -3a^2 + 2a + 1 = (3a + 1)(1 - a)$$

$$(2) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta' \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq a \leq 1.$$

Giá trị  $a = 0$  nằm giữa  $-\frac{1}{3}$  và  $1$  nên không thể là giá trị cần tìm.

Do đó  $\min P = -\frac{1}{3}$  khi  $x$  là nghiệm kép của (2), tức là



$$x = \frac{a+1}{a} = \left(-\frac{1}{3} + 1\right) : \left(-\frac{1}{3}\right) = -2.$$

max  $P = 1$  khi  $x$  là nghiệm kép của (2), tức là

$$x = \frac{a+1}{a} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

63. a) Ta có  $(am + bn)^2 \leq (a^2 + b^2)(m^2 + n^2)$

$$\Leftrightarrow a^2m^2 + 2abmn + b^2n^2 \leq a^2m^2 + a^2n^2 + b^2m^2 + b^2n^2$$

$$\Leftrightarrow a^2n^2 - 2abmn + b^2m^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (an - bm)^2 \geq 0.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow an = bm \Leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n}.$$

Lưu ý: Bất đẳng thức trên được gọi là bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki.

b) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki đối với hai bộ số  $(1; 2)$  và  $(\sqrt{x}; \sqrt{y})$  ta được

$$(1 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt{y})^2 \leq (1^2 + 2^2) \left[ (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow 5^2 \leq 5(x + y) \Leftrightarrow x + y \geq 5.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{y}}{2} \Leftrightarrow x = 1; y = 4.$$

Vậy min  $(x + y) = 5$  khi và chỉ khi  $x = 1; y = 4$ .

64. Áp dụng bất đẳng thức  $|a| - |b| \leq |a - b|$  ta có:

$$A = |x + 3| - |x - 4| \leq |x + 3 - (x - 4)|$$

$$A \leq 7.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq x - 4 \geq 0 \\ x + 3 \leq x - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4.$$

$$65. B = x^2 + 3x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{4} + 3x + \frac{1}{x} - \frac{1}{4}$$

$$B \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{4}} + 3x + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \left( \text{dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \right)$$

$$B \geq x + 3x + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} = 4x + \frac{1}{x} - \frac{1}{4}$$

$$B \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} - \frac{1}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy min } B = 3\frac{3}{4} \text{ khi } x = \frac{1}{2}.$$

$$66. C = x + \frac{1}{x+1} = \left( \frac{x+1}{25} + \frac{1}{x+1} \right) + \frac{24x-1}{25}$$

$$C \geq 2\sqrt{\frac{x+1}{25} \cdot \frac{1}{x+1}} + \frac{24x-1}{25} \text{ (dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 4)$$

$$C \geq 2 \cdot \frac{1}{5} + \frac{24 \cdot 4 - 1}{25} \text{ (vì } x \geq 4)$$

$$C \geq \frac{21}{5} \text{ (dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 4).$$

$$\text{Do đó min } C = \frac{21}{5} \text{ khi và chỉ khi } x = 4.$$

67. Ta có

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x}} = 2y$$

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} = 2z$$

$$\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geq 2\sqrt{\frac{zx}{y} \cdot \frac{xy}{z}} = 2x.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$2S \geq 2(x+y+z) = 2a \Leftrightarrow S \geq a.$$

$$\text{Do đó min } S = a \text{ khi và chỉ khi } x = y = z = \frac{a}{3}.$$

68. Ta có

$$A = \frac{x^2 + 3y^2}{xy} = \frac{x^2 + 9y^2 - 6y^2}{xy} = \frac{x^2 + 9y^2}{xy} - \frac{6y^2}{xy}$$

$$A \geq \frac{2\sqrt{x^2 \cdot 9y^2}}{xy} - \frac{6y}{x} \text{ (dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 3y).$$

$$A \geq 6 - \frac{6y}{3y} \text{ (vì } x \geq 3y)$$

$$A \geq 6 - 2 = 4 \text{ (dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 3y).$$

Vậy  $\min A = 4$  khi và chỉ khi  $x = 3y$ .

**69.** Ta có

$$\begin{aligned} B &= 3x^2 - x + \frac{1}{9x} + \frac{1}{3} \\ &= 3x^2 - 2x + x + \frac{1}{9x} + \frac{1}{3} \\ &= 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \left(x + \frac{1}{9x}\right) \\ &\geq 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{9x}} \\ &\geq 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{9x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } \min B = \frac{2}{3} \text{ khi và chỉ khi } x = \frac{1}{3}.$$

### Chuyên đề 9

**70.** Gọi số có ba chữ số đó là  $\overline{abc}$ . Ta có

$$\begin{aligned} \overline{abc} - \overline{cba} &= (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) \\ &= 99a - 99c = 99(a - c). \end{aligned}$$

Vì các chữ số  $a$  và  $c$  là các chữ số lẻ nên  $a - c \vdots 2$

Do đó  $\overline{abc} - \overline{cba} \vdots 99$  và  $\overline{abc} - \overline{cba} \vdots 2$ ,

mà  $(99; 2) = 1$  nên  $\overline{abc} - \overline{cba} \vdots 198$ .

71. Ta có  $A = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 19^3$

$$= (1^3 + 19^3) + (3^3 + 17^3) + (5^3 + 15^3) + (7^3 + 13^3) + (9^3 + 11^3)$$

$$= (1 + 19).a + (3 + 17).b + (5 + 15).c + (7 + 13).d + (9 + 11).e$$

$$= 20(a + b + c + d + e) \text{ trong đó } a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}.$$

Vậy  $A \vdots 20$ .

72. Ta đặt  $c_1 = a_1 - b_1; c_2 = a_2 - b_2; \dots; c_5 = a_5 - b_5$ .

$$\text{Ta có } c_1 + c_2 + \dots + c_5 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_5 - b_5)$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_5) - (b_1 + b_2 + \dots + b_5) = 0.$$

Tổng của 5 số hạng bằng 0 thì phải có ít nhất một số chẵn, suy ra  $c_1.c_2 \dots c_5 \vdots 2$ .

73. a) Khai triển rồi thu gọn các biểu thức  $(a + b)(b + c)(c + a) - abc$

và  $(a + b + c)(ab + bc + ca) - 2abc$  được các kết quả giống nhau.

b) Vì  $a + b + c \vdots 4$  nên trong ba số  $a, b, c$  ít nhất cũng có một số chẵn (vì nếu cả ba số  $a, b, c$  đều lẻ thì tổng  $a + b + c$  là một số lẻ, không chia hết cho 4).

Suy ra  $2abc \vdots 4$ , do đó  $P \vdots 4$ .

74. Với  $n \in \mathbb{Z}$  thì  $n^2(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)n$ .

$$\text{Ta có } n(n - 1) \vdots 2; (n + 1)n \vdots 2$$

$$\text{Suy ra } n(n - 1)(n + 1)n \vdots 4.$$

Mặt khác,  $n(n - 1)(n + 1) \vdots 3$  mà  $(3; 4) = 1$  nên  $n^2(n^2 - 1) \vdots 12$ .

75. a) Đặt  $\underbrace{11\dots1}_n = a$  thì  $9a + 1 = 10^n$ .

$$\text{Ta có } M = \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{111\dots1}_n + \underbrace{44\dots4}_n + 1$$

$$= a.10^n + a + 4a + 1$$

$$= a(9a + 1) + 5a + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2$$

$$= \underbrace{33\dots3}_{n-1} 34^2.$$

$$b) N = \underbrace{11\dots12}_n \cdot \underbrace{11\dots14}_n + 1$$

Ta đặt  $a = \underbrace{11\dots12}_n$  thì  $b = \underbrace{11\dots14}_n = a + 2$ .

Do đó  $N = a(a + 2) + 1 = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$  là một số chính phương.

76. Giả sử  $n^2 = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100(\overline{cd} + 4) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 400$ .

Suy ra  $101\overline{cd} = n^2 - 400 = (n - 20)(n + 20)$ .

Vì  $n^2$  là một số có 4 chữ số nên  $n < 100$ .

Mặt khác, 101 là số nguyên tố nên  $n + 20 = 101 \Rightarrow n = 81$ .

Vậy  $\overline{abcd} = 81^2 = 6561$ .

Thử lại :  $65 - 61 = 4$ .

Vậy số cần tìm là 6561.

77. Gọi số chính phương cần tìm là  $\overline{xxyy}$ .

Ta có  $\overline{xxyy} = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y$   
 $= 11(100x + y) \div 11$

Do  $\overline{xxyy}$  là số chính phương nên  $\overline{xxyy} \div 121$ .

Suy ra  $100x + y \div 11$  hay  $99x + (x + y) \div 11$

Vì  $99x \div 11$  nên  $x + y \div 11$ .

Do  $0 < x + y \leq 18$  nên  $x + y = 11$ .

Khi đó  $\overline{xxyy} = 11(100x + y) = 11(99x + x + y) = 11(99x + 11) = 121(9x + 1)$ .

Suy ra  $9x + 1$  là một số chính phương.

Thử trực tiếp ta được  $x = 7 ; y = 4$ .

Vậy số cần tìm là  $7744 = 88^2$ .

78.

- Với  $n \geq 5$  thì  $(n!)^4 = (1.2.3.4.5\dots)^4$  có tận cùng là 0 nên  $(n!)^4 + 7$  có tận cùng là 7, không thể là số chính phương.

- Với  $n = 0$  thì  $(0!)^4 + 7 = 8$ , không phải là số chính phương.

- Với  $n = 1$  thì  $(1!)^4 + 7 = 8$ , không phải là số chính phương.

- Với  $n = 2$  thì  $(2!)^4 + 7 = 23$ , không phải là số chính phương.
  - Với  $n = 3$  thì  $(3!)^4 + 7$  có tận cùng là 3, không phải là số chính phương.
  - Với  $n = 4$  thì  $(4!)^4 + 7$  có tận cùng là 3, không phải là số chính phương.
- Tóm lại, với mọi giá trị của  $n$  thì  $(n!)^4 + 7$  đều không là số chính phương.

79. Xét dãy số  $7, 7^2, 7^3, \dots, 7^{1001}$  (1).

Dãy này có 1001 số. Đem chia mỗi số cho 1000 thì được nhiều nhất là 1000 số dư khác nhau nên ít nhất cũng tồn tại hai số có cùng số dư. Gọi hai số đó là  $7^m$  và  $7^n$  ( $1 \leq n < m \leq 1000$ ).

Vậy  $7^m - 7^n \div 1000$  hay  $7^m(7^{m-n} - 1) \div 1000$ .

Mặt khác  $(7^n \div 1000) = 1$  nên  $7^{m-n} - 1 \div 1000$ .

Do đó  $7^{m-n}$  chia cho 1000 dư 1, nên nó tận cùng là 001.

Dễ thấy số  $7^{m-n}$  là một số của dãy (1).

80. Khi chia một số cho 60 thì số dư có thể là  $0, 1, 2, 3, \dots, 59$ .

Chia 60 số dư này thành 31 nhóm (31 lồng):  $(1; 59), (2; 58), (3; 57), \dots, (29; 31); (0)$  và  $(30)$ . Xét phép chia 32 số đã cho cho 60 ta được 32 số dư (coi là 32 con thỏ). Có 32 số dư mà chỉ có 31 nhóm nên tồn tại hai số có số dư thuộc cùng một nhóm. Hai số dư này có hiệu chia hết cho 60 nếu chúng bằng nhau (hoặc thuộc nhóm  $(0)$  hoặc nhóm  $(30)$ , có tổng chia hết cho 60 nếu chúng khác nhau.

## HÌNH HỌC

### Chuyên đề 10

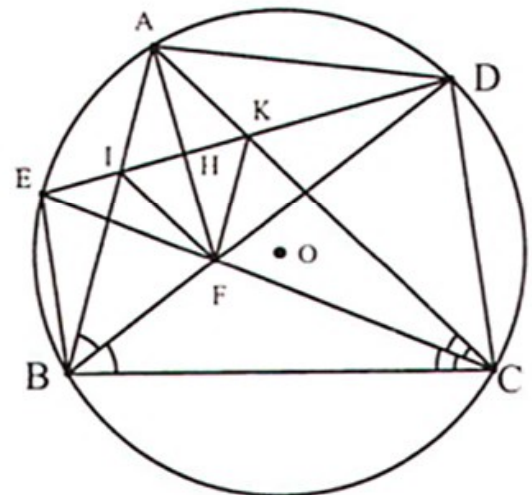
1. (h.31)

a) Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{EBF} &= \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{EA} + \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{AD} \\ &= \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{EB} + \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{DC} = \widehat{EFB} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Delta EBF$  cân tại E.

Ta có  $\widehat{DFA} = \widehat{FAB} + \widehat{DBA}$



Hình 31

$$= \widehat{FAC} + \widehat{DAC} = \widehat{DAF} \Rightarrow \Delta DAF \text{ cân tại D.}$$

$$\text{b) Do } \widehat{DKC} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{DC} + \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{AE} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{DC} + \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{BE} = \widehat{DFC}$$

nên tứ giác DKFC nội tiếp. Suy ra  $\widehat{CKF} = \widehat{CDF} = \widehat{CAB}$ .

Vậy  $KF \parallel AB$ .

c) Chứng minh tương tự, tứ giác BEIF nội tiếp và  $FI \parallel AC$ .

Suy ra AIFK là hình bình hành, mà AF là đường phân giác  $\widehat{IAK}$  nên AIFK là hình thoi.

d) Do tam giác EBF cân đỉnh E, tam giác DAF cân đỉnh D nên tứ giác AEFD là hình thoi thì điều kiện cần và đủ là  $AE = AD$

$$\text{e) } \Leftrightarrow \widehat{AD} = \widehat{AE} \Leftrightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ABD} \Leftrightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ABC}.$$

Hay tam giác ABC cân tại A.

Giả sử AEFD là hình thoi. Khi đó tam giác ABC cân tại A và  $AE \parallel BF$ .

Gọi H là tâm đối xứng của hình thoi. Ta có:

$$S_{AEFD} = 3S_{AIFK} \Leftrightarrow S_{AEF} = 3S_{AIF} \Leftrightarrow EH = 3IH.$$

Khi đó I là trọng tâm của tam giác AEF nên AB đi qua trung điểm EF. Suy ra AEBF là hình bình hành (vì đã có  $AE \parallel BF$ ). Do đó EF đi qua trung điểm của AB. Suy ra tam giác ABC cân tại C. Vậy tam giác ABC đều.

2. (h.32) a)  $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$  nên

$$\widehat{AD} = \widehat{DC} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \text{ mà } \widehat{ADB} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$  BD là đường phân giác, đồng thời là đường cao trong  $\Delta AEB$ . Vậy  $\Delta ABE$  cân tại B.

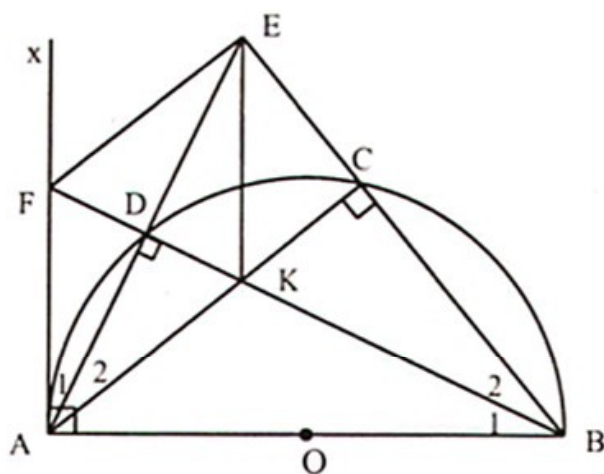
b) AC, BD là đường cao trong tam giác ABE  $\Rightarrow$  K là trực tâm  $\Rightarrow EK \perp AB$ .

$\Delta ABE$  cân tại B có BD là đường cao

$\Rightarrow$  BD là đường trung tuyến

$\Rightarrow DA = DE$ .

$\Delta AKF$  cân tại A có AD là đường cao  $\Rightarrow$  AD là đường trung tuyến  $\Rightarrow DF = DK$  mà  $AE \perp FK$ , từ đó suy ra AKEF là hình thoi.



Hình 32

c) Ta có  $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$ .

$\Delta ABC$  có  $BK$  là đường phân giác nên  $\frac{KC}{AK} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{KC}{AK} = \frac{1}{2}$  hay  $AK = 2.KC$ .

3. (h.33) a)  $\Delta IBN$  và  $\Delta IMB$  có  $\widehat{BIN}$  chung,  $\widehat{IBN} = \widehat{IMB}$  (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta IBN \sim \Delta IMB$  (g.g)

$\Rightarrow \frac{IN}{IB} = \frac{IB}{IM} \Rightarrow IB^2 = IN \cdot IM$ .

Tương tự, ta có  $\Delta IAN \sim \Delta IMA$  (g.g)

$\Rightarrow IA^2 = IN \cdot IM$

$\Rightarrow IA^2 = IB^2 \Rightarrow IA = IB$

b) Ta có  $\widehat{NAB} = \widehat{AMN}$ ,  $\widehat{NBA} = \widehat{BMN}$

mà  $\widehat{NAB} + \widehat{NBA} + \widehat{ANB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 180^\circ$ .

c) Xét  $(O)$  có  $\widehat{AMS} = \widehat{ABS}$  (góc nội tiếp).

Xét  $(O_1)$  có  $\widehat{AMS} = \widehat{NAB}$  (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung), suy ra

$\widehat{ABS} = \widehat{NAB}$ . Mà  $AI = IB$ ;  $\widehat{AIN} = \widehat{BIS} \Rightarrow \Delta AIN = \Delta BIS$  (c.g.c)

$\Rightarrow IN = IS \Rightarrow ANBS$  là hình bình hành.

4. (h.34) a)  $\Delta IAB \sim \Delta IKA$  (g.g)

$\Rightarrow IA^2 = IK \cdot IB$ .

b) Ta có  $IA = IM \Rightarrow IM^2 = IK \cdot IB$

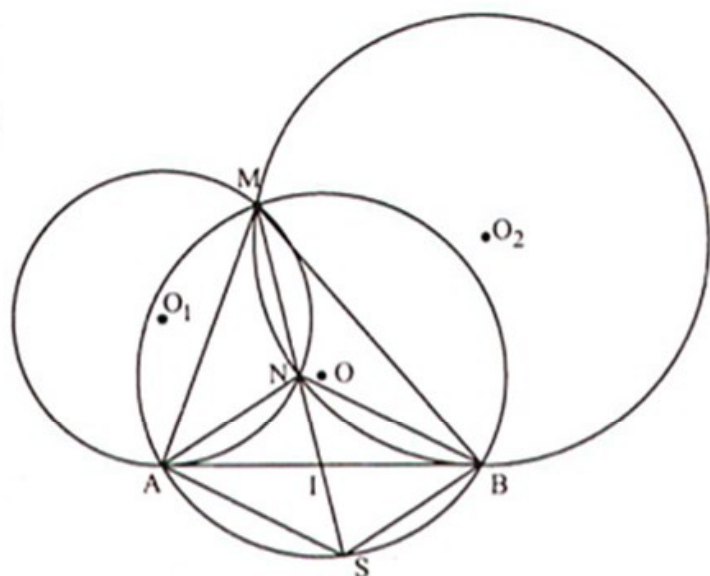
$\Rightarrow \frac{IM}{IK} = \frac{IB}{IM}$  mà  $\widehat{MIB}$  chung

nên  $\Delta IMK \sim \Delta IBM$  (c.g.c).

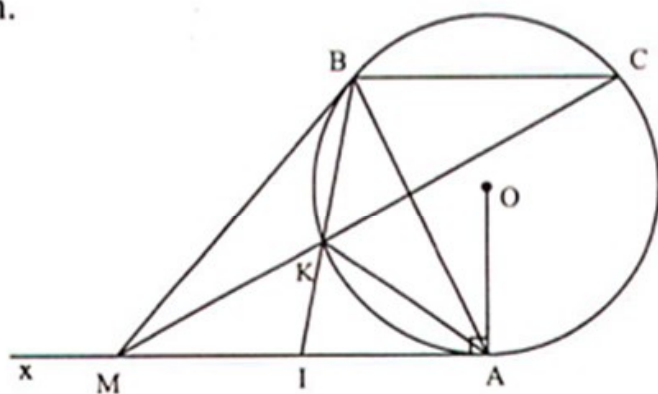
c)  $\Delta IMK \sim \Delta IBM \Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{IBM}$

mà  $\widehat{IBM} = \widehat{BCK}$  (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{BCK} \Rightarrow AM \parallel BC$ .



Hình 33



Hình 34



$$\begin{aligned}
 & d) AK \perp MB \Leftrightarrow \widehat{KAB} + \widehat{MBA} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{KBM} + \widehat{MBA} = 90^\circ \\
 & \Leftrightarrow \widehat{KMA} + \widehat{MAB} = 90^\circ \Leftrightarrow MK \perp AB \Leftrightarrow BI \perp AM \Leftrightarrow BA = BM \\
 & \Leftrightarrow \Delta ABM \text{ đều} \Leftrightarrow AM = R\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

5. (h.35) a)  $\Delta IAB$  đồng dạng  $\Delta ICA$  (g.g)

$$\Rightarrow IA^2 = IB \cdot IC \Rightarrow IB \cdot IC = \frac{a^2}{4} \text{ không đổi.}$$

b) Tia DB cắt AC tại K. Ta có  $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$  mặt khác  $\widehat{ACI} = \widehat{BAD}$  nên  $\widehat{ACI} = \widehat{BDA}$ .

$$\text{Ta có } \widehat{ACI} + \widehat{CAI} = 90^\circ$$

$$\text{nên } \widehat{BDA} + \widehat{CAI} = 90^\circ \Rightarrow DK \perp AC$$

từ đó suy ra B là trực tâm  $\Delta ABC$ .

$\Delta ABC$  có BK, AI là đường cao cắt nhau tại D  $\Rightarrow D$  là trực tâm của  $\Delta ABC$ .

Vậy khi đường tròn (O) thay đổi thì trực tâm của  $\Delta ABC$  là điểm D cố định.

c) Gọi H là giao điểm của tia AB và CD.

D' đối xứng với D qua AC nên  $\Delta ADC = \Delta AD'C$  (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{AD'C} = \widehat{ADC} \text{ mà } \widehat{ABC} = \widehat{IBH} \text{ và } \widehat{IBH} + \widehat{ADC} = 180^\circ$$

$$\text{nên } \widehat{AD'C} + \widehat{ABC} = 180^\circ \Rightarrow ABCD' \text{ là tứ giác nội tiếp.}$$

$$d) \cos \widehat{CAI} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{CAI} = 60^\circ \Rightarrow \Delta CAD \text{ đều. Do } \Delta ADC = \Delta AD'C \text{ nên } \Delta AD'C \text{ đều}$$

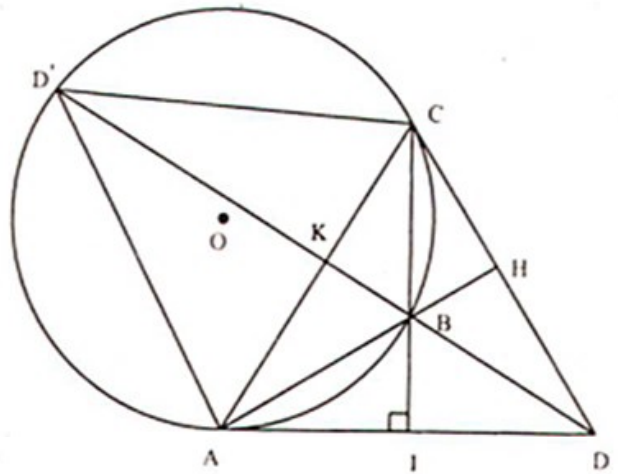
$$\Rightarrow AD = CD = CD' = AD' \Rightarrow ADCD' \text{ là hình thoi.}$$

6. (h.36) a) Ta có  $\widehat{ABO} = 90^\circ, \widehat{ACO} = 90^\circ, \widehat{AHO} = 90^\circ \Rightarrow A, H, B, O, C$  cùng thuộc đường tròn đường kính AO  $\Rightarrow \widehat{BHA} = \widehat{BOA}, \widehat{CHA} = \widehat{COA}$  mặt khác AB, AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên  $\widehat{BOA} = \widehat{COA} \Rightarrow \widehat{BHA} = \widehat{CHA} \Rightarrow HA$  là tia phân giác của  $\widehat{BHC}$ .

b) Gọi giao điểm của BC và AO là I, ta có :

$$\bullet \Delta AIK \sim \Delta AHO \text{ (g.g)} \Rightarrow AI \cdot AO = AK \cdot AH. \quad (1)$$

$$\bullet \Delta ABD \sim \Delta AEB \text{ (g.g)} \Rightarrow AD \cdot AE = AB^2 = AC^2. \quad (2)$$



Hình 35

•  $\Delta AIC \sim \Delta ACO$  (g.g)  $\Rightarrow AI \cdot AO = AC^2$ . (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra  $AK \cdot AH = AD \cdot AE$ .

c) Từ  $AK \cdot AH = AD \cdot AE$

$$\Rightarrow \frac{2}{AK} = \frac{2AH}{AD \cdot AE}.$$

Mặt khác ta có

$$AD + AE = AH - DH + AH + HE = 2AH$$

$$\text{nên } \frac{2}{AK} = \frac{AD + AE}{AD \cdot AE} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}.$$

d)  $\Delta ABD \sim \Delta AEB$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{EB}$ . (4)

$$\Delta ACD \sim \Delta AEC$$
 (g.g)  $\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{EC}$ . (5)

Từ (4), (5) và lưu ý  $AB = AC$ , ta có  $\frac{BD}{EB} = \frac{CD}{EC} \Rightarrow BD \cdot EC = CD \cdot BE$ .

e)  $\Delta ABD \sim \Delta AEB$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{BD}{EB}$ . (6)

$$\Delta ACD \sim \Delta AEC$$
 (g.g)  $\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{EC}$ . (7)

Nhân vế với vế của (6), (7) và lưu ý  $AB = AC$ , ta có :  $\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{EB} \cdot \frac{CD}{EC}$ . (8)

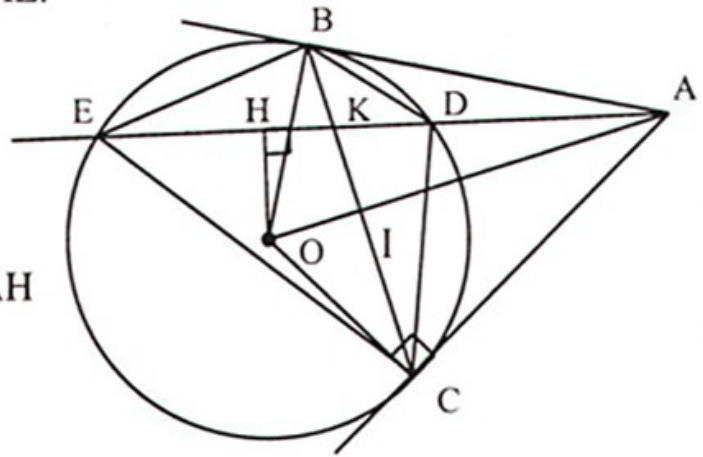
Lại có  $\Delta BKD \sim \Delta EKC$  (g.g),  $\Delta BKE \sim \Delta DKC$  (g.g), ta có :

$$\frac{BK}{EK} = \frac{BD}{EC}, \quad \frac{BK}{DK} = \frac{BE}{DC}.$$

Chia từng vế của hai kết quả trên ta được  $\frac{DK}{EK} = \frac{BD}{EC} \cdot \frac{CD}{BE}$ . (9)

Từ (8) và (9) ta có :  $\frac{AD}{AE} = \frac{DK}{EK} \Rightarrow 1 - \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{EK} - 1$

$$\Rightarrow 2 = \frac{DE}{EK} + \frac{DE}{AE} \Rightarrow \frac{1}{AE} + \frac{1}{KE} = \frac{2}{DE}.$$



Hình 36

### Chuyên đề 11

7. (h.37) a)  $\widehat{CPO} = \widehat{CKO} = 90^\circ$  (vì CP, CK là tiếp tuyến)

$\Rightarrow$  CPOK là tứ giác nội tiếp. (1)

b)  $IA = IB \Rightarrow OI \perp AB$

$\Rightarrow \widehat{OIC} = \widehat{OPC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$  CPIO là tứ giác nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra C, P, I, O, K cùng nằm trên một đường tròn đường kính CO.

c)  $AP \parallel CK \Rightarrow \widehat{APK} = \widehat{PKC}$  (so le trong) mà  $\widehat{PAK} = \widehat{PKC}$  (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)  $\Rightarrow \widehat{APK} = \widehat{PAK}$ ,

mà  $\widehat{PAK} = \widehat{PBx}$ ;  $\widehat{APK} = \widehat{ABK} = \widehat{CBx} \Rightarrow \widehat{PBx} = \widehat{CBx} \Rightarrow$  điều phải chứng minh.

8. (h.38) a) Ta có  $\widehat{OMP} = \widehat{ONP} = 90^\circ$

$\Rightarrow$  tứ giác OMNP nội tiếp.

b) OMNP là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{P}_1 = \widehat{N}_1$ .

$\Delta ONC$  cân ( $OC = ON$ )  $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{N}_1$

$\Rightarrow \widehat{P}_1 = \widehat{C}_1$ .

$\Delta OMC$  và  $\Delta MOP$  có  $\widehat{COM} = \widehat{PMO} = 90^\circ$ ,

OM chung,  $\widehat{P}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \Delta OMC = \Delta MOP$

$\Rightarrow MP = OC \Rightarrow MP = OD$ .

Tứ giác MODP có  $MP \parallel OD$ ,  $MP = OD$ ,  $\widehat{MOD} = 90^\circ$

$\Rightarrow$  MODP là hình chữ nhật  $\Rightarrow$  MODP là tứ giác nội tiếp.

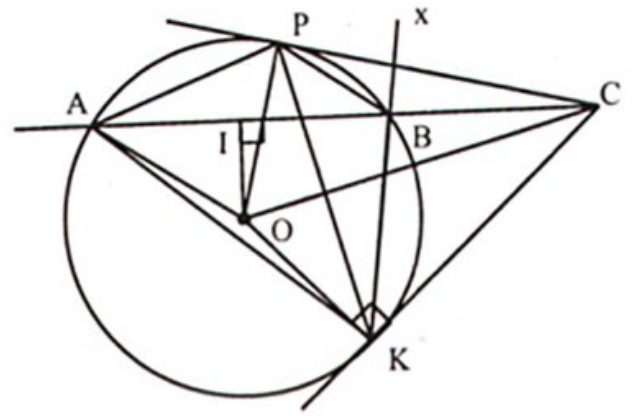
Mà MOPN là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow$  O, M, N, P, D cùng nằm trên một đường tròn.

c) Ta có  $\widehat{COM} = \widehat{CND} = 90^\circ \Rightarrow \Delta COM \sim \Delta CND$  (g.g)

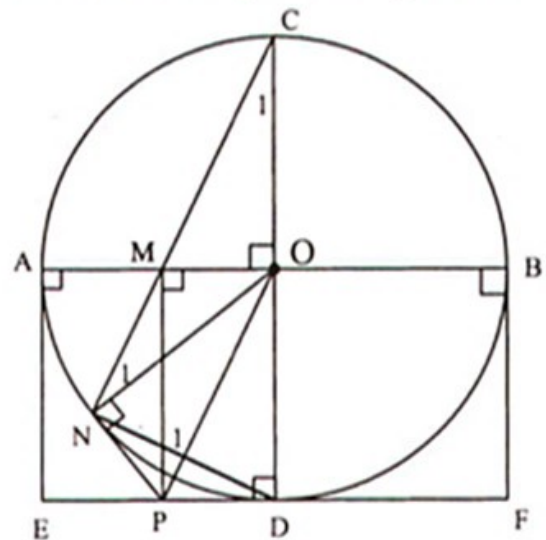
$\Rightarrow CM \cdot CN = CO \cdot CD = 2R^2$ .

Vậy tích  $CM \cdot CN = 2R^2$  không phụ thuộc vị trí M.

d) MODP là hình chữ nhật suy ra  $PD \parallel AB$  nên P thuộc đường thẳng đi qua D và song song với AB.



Hình 37



Hình 38

Mà M chỉ chạy trong đoạn AB nên P chỉ chạy trong đoạn EF.

9. (h.39) Ta có PA, PB là tiếp tuyến nên

$$\widehat{PAO} = \widehat{PBO} = 90^\circ,$$

do đó AOBP nội tiếp.

(1)

Mặt khác, BC // AD nên  $sd \widehat{AB} = sd \widehat{CD}$

$$\Rightarrow \widehat{AIB} = \frac{sd \widehat{AB} + sd \widehat{CD}}{2} = sd \widehat{AOB}.$$

Hay  $\widehat{AIB} = \widehat{AOB} \Rightarrow I$  và  $O$  là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn AB dưới một góc bằng nhau.

Do đó AOIB là tứ giác nội tiếp.

(2)

Từ (1) và (2) suy ra A, O, I, B, P cùng nằm trên một đường tròn.

10. (h.40) Ta có ADHE là hình chữ nhật nên

$\widehat{D}_1 = \widehat{H}_1$ , mặt khác  $\widehat{H}_1 = \widehat{C}_1$  (cùng phụ với  $\widehat{H}_2$ )  $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}_1$  mà  $\widehat{D}_1 + \widehat{BDE} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{BDE} = 180^\circ$ , do đó BCED là tứ giác nội tiếp.

(1)

Ta có  $\widehat{BEF} = 90^\circ$ ;  $\widehat{BCF} = 90^\circ$  nên BECF là tứ giác nội tiếp.

(2)

Từ (1) và (2) suy ra năm điểm B, D, E, C, F cùng nằm trên một đường tròn.

11. (h.41) a) Áp dụng định lí góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, ta có:

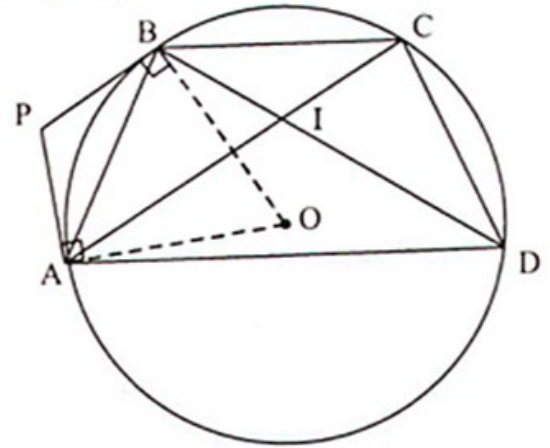
$$\widehat{ADB} = 90^\circ; \widehat{ADC} = 90^\circ.$$

Suy ra  $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ .

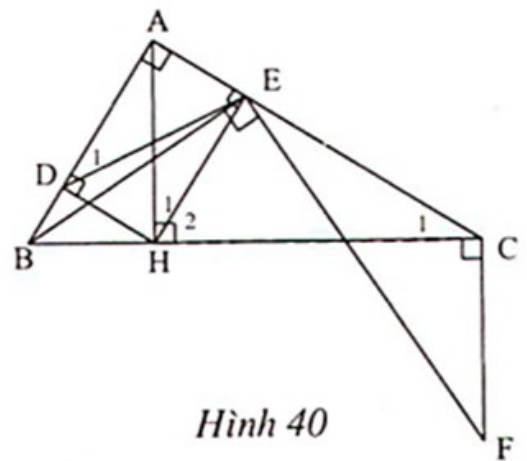
Vậy B, D, C thẳng hàng.

b) Áp dụng định lí góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, ta có:

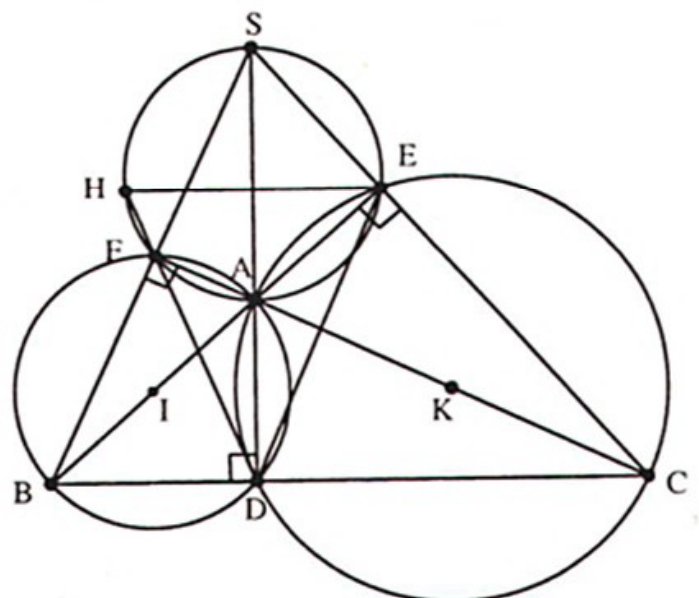
$$\widehat{BFA} = 90^\circ; \widehat{CEA} = 90^\circ;$$



Hình 39



Hình 40



Hình 41

suy ra  $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} (= 90^0)$ . Khi đó E ; F là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau.

Vậy tứ giác BFEC nội tiếp.

c) Xét tam giác ABC có  $AD \perp BC$  ;  $BF \perp AC$  ;  $CE \perp AB$ . Suy ra AD, BF, CE là ba đường cao. Vậy chúng cắt nhau tại một điểm S.

d) Ta có AEHF nội tiếp nên  $\widehat{EHF} = \widehat{FAB}$  mặt khác  $\widehat{FAB} = \widehat{FDB} \Rightarrow \widehat{EHF} = \widehat{FDB} \Rightarrow HE // BC \Rightarrow AD \perp HE$ . (1)

Vận dụng góc nội tiếp, tứ giác nội tiếp ta có:  $\widehat{FDA} = \widehat{FBA} = \widehat{FCE} = \widehat{ADE}$

$\Rightarrow DA$  là đường phân giác  $\widehat{EDF}$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra DEH cân tại D suy ra  $DE = DH$ .

12. (h.42) a)  $\widehat{CAD} = 90^0$ ,  $\widehat{CED} = 90^0$

$\Rightarrow$  tứ giác ADEC nội tiếp.

$\widehat{CAB} = 90^0$ ,  $\widehat{CFB} = 90^0$

$\Rightarrow$  tứ giác AFBC nội tiếp.

b) Ta có  $\triangle AED \sim \triangle ABG$  (g.g)

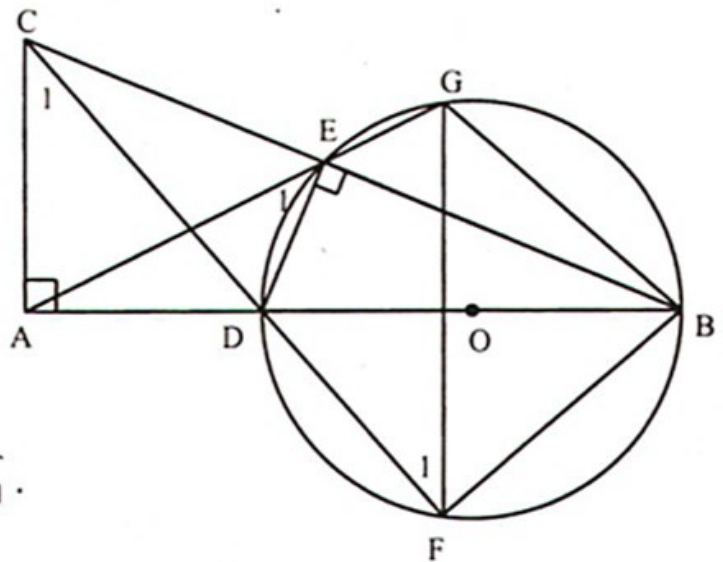
$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AG} \Rightarrow AD \cdot AB = AE \cdot AG$ .

c) Tứ giác ACED nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{E}_1$ .

Tứ giác DFGE nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{F}_1 = \widehat{E}_1$ .

Suy ra  $\widehat{C}_1 = \widehat{F}_1 \Rightarrow AC // GF$ .

d)  $\triangle ABC$  có CA, BF, DE là đường cao  $\Rightarrow$  CA, BF, DE đồng quy.



Hình 42

### Chuyên đề 12

13. (h.43) a) DC là tiếp tuyến của (O; R)  $\Rightarrow \widehat{DCO} = 90^0$  (tính chất tiếp tuyến).

Mặt khác  $DH \perp AO$  (giả thiết)  $\Rightarrow \widehat{DHO} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{DCO} + \widehat{DHO} = 180^0$ , mà hai góc ở vị trí đối diện, suy ra tứ giác DHOC nội tiếp đường tròn đường kính DO.

b) Vì DB, DC là tiếp tuyến của đường tròn (O; R) nên DB = DC và DE là tia phân giác góc  $\widehat{BDC}$  nên DE cũng là đường cao trong  $\triangle DBC \Rightarrow DE \perp BC$ .

Hai tam giác vuông HDO và EAO có chung góc nhọn  $\widehat{DOA}$

nên  $\triangle HDO \sim \triangle EAO$  (g.g)

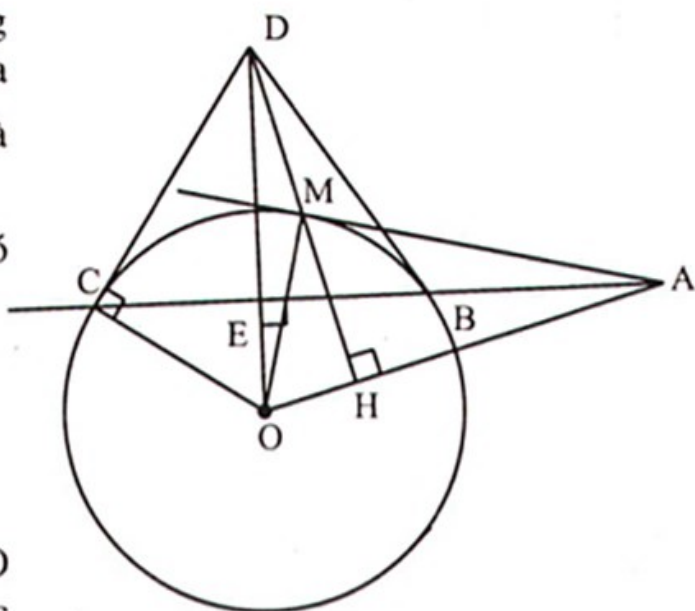
$$\Rightarrow \frac{HO}{EO} = \frac{OD}{OA} \Rightarrow OH.OA = OE.OD.$$

c)  $\triangle COD$  vuông tại C có  $CE \perp DO$  nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông:

$$OE.OD = OC^2 = R^2 \text{ mà } OE.OD = OH.OA \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow OH.OA = OC^2 \Rightarrow OH.OA = OM^2 \Rightarrow \frac{OH}{OM} = \frac{OM}{OA} \text{ và } \widehat{MOA} \text{ chung}$$

nên  $\triangle OHM \sim \triangle OMA$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OHM}$  mà  $\widehat{OHM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OMA} = 90^\circ$   
 $\Rightarrow AM$  vuông góc với bán kính  $OM$  tại  $M$ . Vậy  $AM$  là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).



Hình 43

14. (h.44) a)  $(O_1); (O_2)$  tiếp xúc ngoài tại A  $\Rightarrow O_1, A, O_2$  thẳng hàng mà BC là tiếp tuyến chung

$$\Rightarrow O_1B \perp BC, O_2C \perp BC$$

$$\Rightarrow O_1B \parallel O_2C$$

$$\Rightarrow \widehat{BO_1A} + \widehat{CO_2A} = 180^\circ.$$

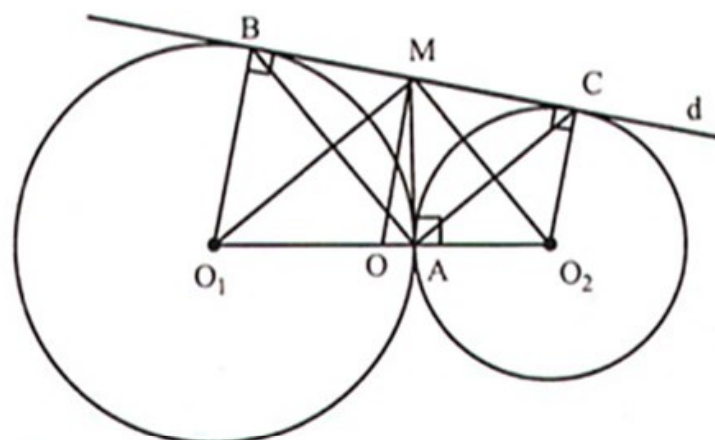
$$\text{Ta có } \widehat{CBA} = \frac{1}{2} \widehat{BO_1A}; \quad \widehat{BCA} = \frac{1}{2} \widehat{CO_2A}$$

$$\Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{BCA} = \frac{1}{2} (\widehat{BO_1A} + \widehat{CO_2A}) = 90^\circ \text{ hay } \triangle ABC \text{ vuông tại A.}$$

b)  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $MB = MC$  nên  $MA = MB$ .

Xét  $\triangle O_1BM$  và  $\triangle O_1AM$  có  $MA = MB, MO_1$  chung,  $O_1A = O_1B$

nên  $\triangle O_1BM = \triangle O_1AM$  (c.c.c)



Hình 44

$\Rightarrow \widehat{O_1BM} = \widehat{O_1AM} \Rightarrow \widehat{O_1AM} = 90^\circ$  mà  $O_1A$  là bán kính  $\Rightarrow MA$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O_1)$ .

Tương tự ta có  $\widehat{O_2AM} = 90^\circ$  mà  $O_2A$  là bán kính  $\Rightarrow MA$  cũng là tiếp tuyến của đường tròn  $(O_2)$ .

c)  $MA, MB$  là tiếp tuyến của  $(O_1) \Rightarrow MO_1$  là tia phân giác của  $\widehat{BMA}$ .

$MA, MC$  là tiếp tuyến của  $(O_2) \Rightarrow MO_2$  là tia phân giác của  $\widehat{CMA}$ .

Mà  $\widehat{BMA}$  và  $\widehat{CMA}$  là hai góc kề bù  $\Rightarrow MO_1 \perp MO_2$  hay góc  $O_1MO_2$  vuông.

d) Gọi  $O$  là trung điểm của  $O_1O_2 \Rightarrow OO_1 = OO_2 = OM$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta O_1O_2M$ . (1)

Mặt khác  $O_1O_2CB$  là hình thang ( $O_1B \parallel O_2C$ ) có  $OO_1 = OO_2; MB = MC \Rightarrow OM$  là đường trung bình  $\Rightarrow OM \parallel O_1B \Rightarrow OM \perp BC$ . (2)

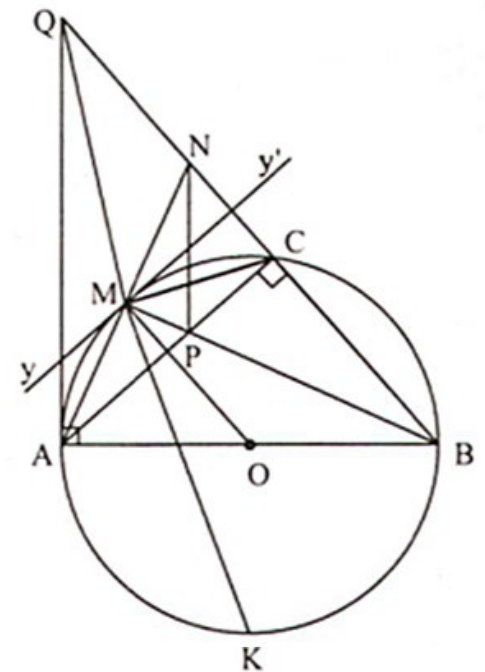
Từ (1) và (2) suy ra  $BC$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta MO_1O_2$ .

15. (h.45) a) Tam giác  $ABN$  có đường cao  $BM$  đồng thời là đường phân giác nên tam giác  $ABN$  cân tại  $B$ .

b) Vì  $P$  là trực tâm của tam giác  $ABN$  nên  $NP \perp AB \Rightarrow NP \parallel AQ$ , do đó  $APNQ$  là hình thang.

c) Nếu  $Q, M, K$  thẳng hàng thì từ tính chất góc có đỉnh bên ngoài đường tròn, ta có  $QM$  là đường phân giác của góc  $AQB$ . Mặt khác,  $BM$  là phân giác của góc  $ABQ$  nên  $AM$  là phân giác của góc  $BAQ$ , vô lí. Vậy ba điểm  $Q, M, K$  không thẳng hàng.

d) Tại điểm  $M$ , kẻ tiếp tuyến  $yMy'$  với  $(O)$  sao cho  $My$  và  $MA$  cùng phía với đường thẳng  $MQ$ . Ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MNQ$  tiếp xúc với  $(O)$  khi và chỉ khi  $yMy'$  tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MNQ$  tại  $M$ . Điều đó tương đương với



Hình 45

$$\begin{aligned} \widehat{NQM} = \widehat{NMy'} &\Leftrightarrow \widehat{NQM} = \widehat{AMy} \Leftrightarrow \widehat{NQM} = \widehat{ABM} \Leftrightarrow \widehat{NQM} = \widehat{MBC} \\ &\Leftrightarrow MB = MQ \Leftrightarrow BC = NQ \text{ (vì } \Delta MNC \text{ cân)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } AB^2 &= BC \cdot BQ \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot (BN + NQ) \Leftrightarrow 4R^2 = BC \cdot (2R + BC) \\ &\Leftrightarrow BC = R(\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Vậy với  $BC = R(\sqrt{5} - 1)$  thì đường tròn ngoại tiếp  $\triangle MNQ$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$ .

16. (h.46) a) Ta có  $\widehat{BOO'} = \widehat{BCA} (= \frac{1}{2}\widehat{BOA})$ ;  $\widehat{BO'O} = \widehat{BDA} (= \frac{1}{2}\widehat{BO'A})$

$\Rightarrow \triangle BOO' \sim \triangle BCD$  (g.g).

b) Ta có  $\widehat{ABC} = \widehat{ACK}$ ;  $\widehat{ABD} = \widehat{ADK}$

mà  $\widehat{ACK} + \widehat{ADK} + \widehat{CKD} = 180^\circ$

$\Rightarrow$  điều phải chứng minh.

c) Vì  $IE \parallel KD$  nên  $\widehat{DIE} = \widehat{KDA}$  mà  $\widehat{ABD} = \widehat{ADK} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{EID}$  suy ra tứ giác  $BAIE$  nội tiếp, do đó  $\widehat{BAE} = \widehat{BIE}$ .

Tứ giác  $BCKD$  nội tiếp nên  $\widehat{BCD} = \widehat{BKD}$ .

Mặt khác  $\widehat{BIE} = \widehat{BKD}$  do đó  $\widehat{BAE} = \widehat{BCA}$ .

Từ đó suy ra  $AE$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O; R)$ .

17. (h.47) a) Xét  $\triangle ABD$  có  $BC \perp DA$ ,  $CA = CD$  nên  $BC$  vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến, do đó  $\triangle ABD$  cân tại  $B$ .

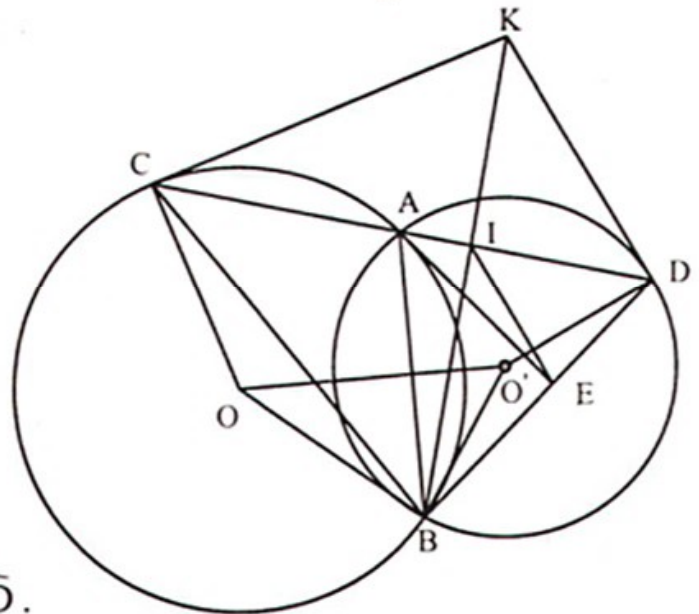
b)  $\widehat{CAE} = 90^\circ$  nên  $CE$  là đường kính của đường tròn  $(O) \Rightarrow C, O, E$  thẳng hàng.

Ta có  $CO$  là đường trung bình của  $\triangle ABD \Rightarrow CO \parallel BD \Rightarrow CE \parallel BD$ .

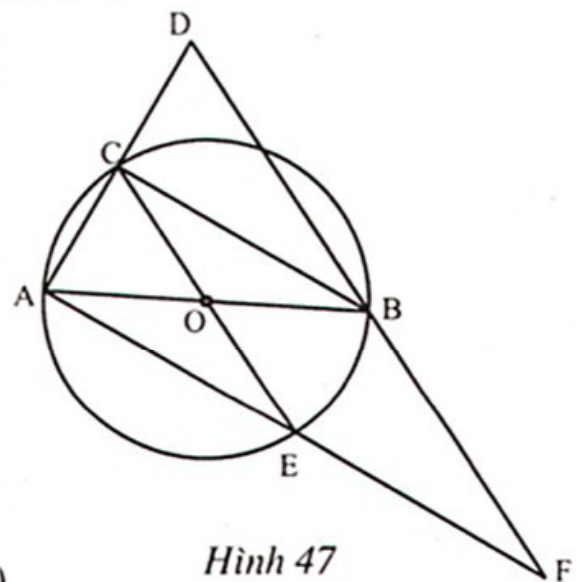
Tương tự,  $OE$  là đường trung bình của  $\triangle ABF \Rightarrow OE \parallel BF \Rightarrow CE \parallel BF$ .

Suy ra  $B, D, F$  thẳng hàng (theo tiên đề Ôclit).

c) Theo tính chất đường trung bình của  $\triangle ABD$ ;  $\triangle ABF$  ta có  $OC = \frac{1}{2}BD$ ;  $OE = \frac{1}{2}BF$  mà  $OC = OE \Rightarrow BD = BF = AB$



Hình 46



Hình 47



$\Rightarrow B$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ADF \Rightarrow BA$  là bán kính.

Mà  $OB = AB - OA$  nên đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ADF$  tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  tại  $A$ .

18. (h.48) a) Ta có  $\widehat{AOM} + \widehat{BON} = 90^\circ$  ;

$$\widehat{ONB} + \widehat{BON} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{ONB}.$$

$$\text{Mà } \widehat{MAO} = \widehat{OBN} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta AOM \sim \Delta BNO \text{ (g.g)}$$

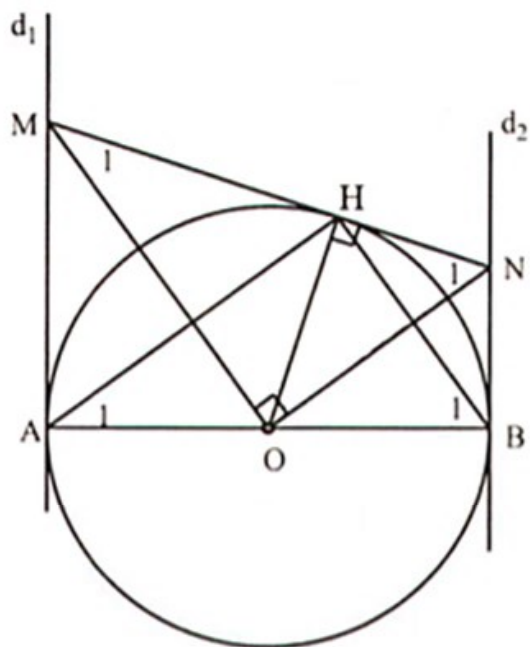
$$\Rightarrow \frac{AO}{BN} = \frac{AM}{BO} \Rightarrow AM \cdot BN = AO \cdot BO = \frac{AB^2}{4}.$$

b) Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên đường thẳng  $MN$  thì ta có các tứ giác  $OAMH$ ;

$OBNH$  nội tiếp được  $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ ;  $\widehat{B_1} = \widehat{N_1}$  mà

$$\widehat{M_1} + \widehat{N_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{AHB} = 90^\circ \Rightarrow H$  thuộc đường tròn đường kính  $AB$ , mà  $OH \perp MN \Rightarrow MN$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .



Hình 48

### Chuyên đề 13

19. (h.49) a)  $\Delta OIC \sim \Delta OBA$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OI}{OB} = \frac{OC}{OA} \Rightarrow OB \cdot OC = OI \cdot OA.$$

Xét các góc nội tiếp, ta có

$$\widehat{ICB} = \widehat{IAB}, \widehat{BCE} = \widehat{EDB}$$

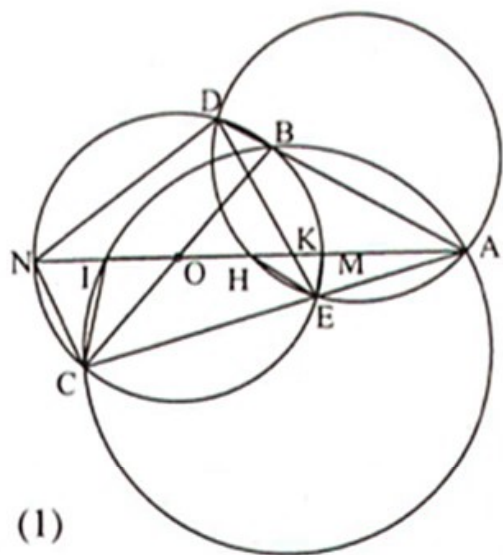
$$\Rightarrow \widehat{ICB} + \widehat{BCE} = \widehat{IAB} + \widehat{EDB} \Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{EKA}$$

$$\Rightarrow \Delta AKE \sim \Delta ACI \text{ (g.g)} \Rightarrow AK \cdot AI = AE \cdot AC. \quad (1)$$

b) Từ  $OB \cdot OC = OI \cdot OA \Rightarrow R \cdot R = OI \cdot 2R \Rightarrow OI = \frac{1}{2} \cdot R.$

Gọi  $M, N$  là giao điểm của đường thẳng  $AO$  với đường tròn  $(O)$  ( $M$  nằm giữa  $A$  và  $N$ )

$$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ACN} \Rightarrow \Delta AME \sim \Delta ACN \text{ (g.g)} \Rightarrow AM \cdot AN = AE \cdot AC. \quad (2)$$



Hình 49

Từ (1) và (2) suy ra  $AK \cdot AI = AM \cdot AN \Rightarrow AK \cdot \frac{5R}{2} = R \cdot 3R \Rightarrow AK = \frac{6R}{5}$ .

c) Gọi H là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$  với AO. Ta có:

$$\triangle KHE \sim \triangle KDA \text{ (g.g)} \Rightarrow KH \cdot KA = KD \cdot KE$$

$$\triangle KDN \sim \triangle KME \text{ (g.g)} \Rightarrow KN \cdot KM = KD \cdot KE$$

$$\Rightarrow KH \cdot KA = KM \cdot KN \Rightarrow KH \cdot \frac{6R}{5} = \left( \frac{6R}{5} - R \right) \cdot \left( 3R - \frac{6R}{5} \right)$$

$$\Rightarrow KH = \frac{3R}{10} \Rightarrow H \text{ cố định} \Rightarrow \text{điều phải chứng minh.}$$

20. (h.50) a) Tứ giác SEHF nội tiếp vì H và E cùng nhìn FS dưới một góc vuông.

b) Ta có  $\triangle OHS \sim \triangle OEF$  (g.g) suy ra  $OH \cdot OF = OE \cdot OS$ .

Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông

$$\triangle AOS \text{ ta có } OE \cdot OS = OA^2$$

$$\text{nên } OH \cdot OF = OA^2 = R^2.$$

c) Chứng minh các cặp tam giác đồng dạng:

$$\bullet \triangle SAD \sim \triangle SCA \text{ (g.g)} \Rightarrow SA^2 = SC \cdot SD$$

$$\bullet \triangle SAE \sim \triangle SOA \text{ (g.g)} \Rightarrow SA^2 = SE \cdot SO$$

$$\bullet \triangle SEI \sim \triangle SHO \text{ (g.g)} \Rightarrow SI \cdot SH = SE \cdot SO$$

Từ đó suy ra  $SI \cdot SH = SC \cdot SD$ .

d) Từ đề bài O, C, D cố định nên H cố định.

Từ câu b) suy ra  $OF = \frac{R^2}{OH}$  không đổi. Vậy đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là F.

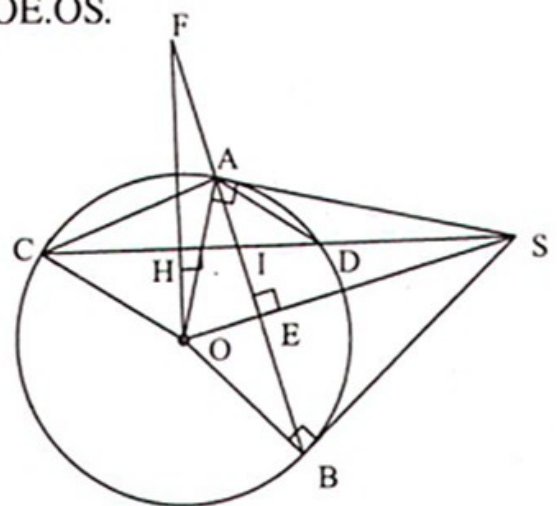
21. (h.51) a)  $\widehat{ACD} = 90^\circ; \widehat{AMD} = 90^\circ \Rightarrow A, C, M, D$  cùng thuộc đường tròn đường kính AD.

b) MN là tiếp tuyến  $\Rightarrow \widehat{NMK} = \widehat{ABM}$  (góc giữa tiếp tuyến và dây).

$$\text{Ta lại có: } \widehat{K_2} = \widehat{B_1} \text{ (cùng phụ } \widehat{A_1}) \Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{NMK}$$

$\Rightarrow \triangle MNK$  cân tại N.

c) Ta có  $\triangle COI$  vuông tại C



Hình 50

$$\Rightarrow IC^2 + CO^2 = OI^2 \Rightarrow IC^2 = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow IC = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CK = \frac{R\sqrt{3}}{4}.$$

Ta có  $\Delta CAK \sim \Delta CDB$

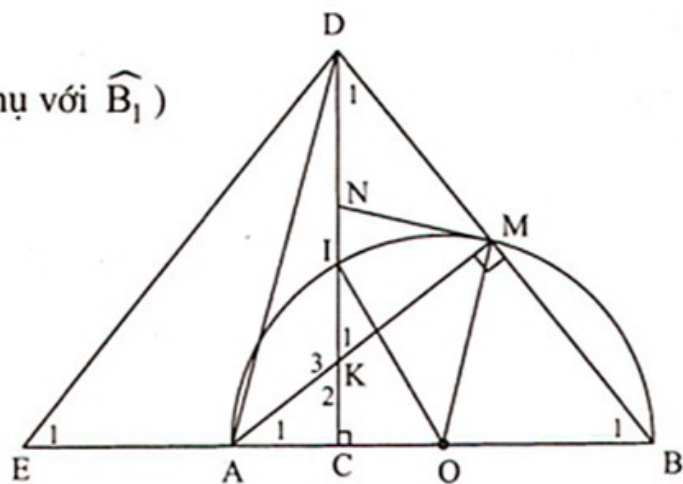
vì  $\widehat{ACD} = \widehat{BCD} = 90^\circ; \widehat{A}_1 = \widehat{D}_1$  (cùng phụ với  $\widehat{B}_1$ )

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CK}{CB} \Rightarrow CD \cdot CK = CA \cdot CB$$

$$\Rightarrow CD \cdot \frac{R\sqrt{3}}{4} = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} \Rightarrow CD = R\sqrt{3}.$$

Do đó diện tích  $\Delta ABD$  là

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}.$$



Hình 51

d) Gọi E là điểm đối xứng với B qua C

suy ra E cố định và  $\Delta BDE$  cân tại D  $\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{B}_1$  mà  $\widehat{B}_1 = \widehat{K}_2 \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{K}_2$ .

Mặt khác  $\widehat{K}_2 + \widehat{K}_3 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{E}_1 + \widehat{K}_3 = 180^\circ \Rightarrow$  tứ giác AKDE nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp  $\Delta AKD$  luôn đi qua điểm E cố định.

22. (h.52) Gọi giao điểm của đường thẳng OA với đường tròn (O) là I, K

$\Rightarrow I, K$  cố định.

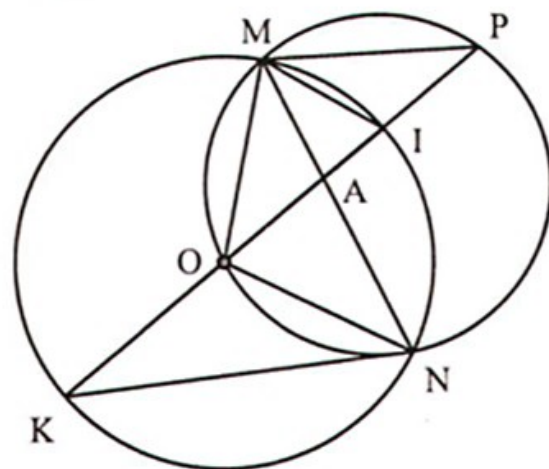
Gọi giao điểm của đường thẳng OA với đường tròn ngoại tiếp  $\Delta OMN$  là P.

Từ  $\Delta AMI \sim \Delta AKN$  (g.g) suy ra

$$AM \cdot AN = AK \cdot AI. \quad (1)$$

$\Delta AON \sim \Delta AMP$  (g.g) suy ra

$$AO \cdot AP = AM \cdot AN. \quad (2)$$



Hình 52

Từ (1) và (2) ta có:  $AO \cdot AP = AI \cdot AK$  hay  $AP = \frac{AI \cdot AK}{AO}$  mà AI, AK, AO cố định

$\Rightarrow AP$  không đổi  $\Rightarrow P$  là điểm cố định.

23. (h.53) a) Xét  $\Delta ABD$  có  $BM \perp AD; DH \perp AB \Rightarrow C$  là trực tâm  $\Rightarrow AC \perp DB$  mà  $AE \perp BE$  (vì  $\widehat{AEB} = 90^\circ$ )  $\Rightarrow B, E, D$  thẳng hàng.

Tứ giác AMCH có  $\widehat{AMC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$   
 $\Rightarrow$  AMCH nội tiếp đường tròn đường kính AC  $\Rightarrow \widehat{MAH} = \widehat{MCI}$  (cùng bù với  $\widehat{ABM}$ ) mà MI là tiếp tuyến  
 $\Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{MAH} \Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{MCI}$   
 $\Rightarrow \Delta MCI$  cân tại I  $\Rightarrow IM = IC.$  (1)

Ta có  $\widehat{MDI} + \widehat{DCM} = 90^\circ$ ;  
 $\widehat{DMI} + \widehat{IMC} = 90^\circ$

mà  $\widehat{DCM} = \widehat{IMC} \Rightarrow \widehat{DMI} = \widehat{MDI}$   
 $\Rightarrow \Delta IMD$  cân tại I  $\Rightarrow IM = ID.$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow ID = IC = IM.$

$\Delta CDE$  vuông tại E có  $IC = ID \Rightarrow IC = ID = IE.$

Từ đó ta có  $IM = IE; OM = OE,$  OI là cạnh chung suy ra  $\Delta OEI = \Delta OMI$  (c.c.c).

$\Rightarrow \widehat{OEI} = \widehat{OMI} \Rightarrow \widehat{OEI} = 90^\circ \Rightarrow IE$  là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) IM, IE là tiếp tuyến của O  $\Rightarrow IO \perp ME$  tại K.

$\Delta OMI$  có  $\widehat{OMI} = 90^\circ$ ;  $MK \perp OI$  nên  $OM^2 = OK.OI \Rightarrow OK.OI = R^2$  không đổi.

Gọi S là giao điểm của ME và AB. Xét  $\Delta OKS$  và  $\Delta OHI$  có  $\widehat{OHI} = \widehat{OKS} = 90^\circ$ ;  
 $\widehat{IOS}$  chung  $\Rightarrow \Delta OKS \sim \Delta OHI$  (g.g)  $\Rightarrow OK.OI = OH.OS$

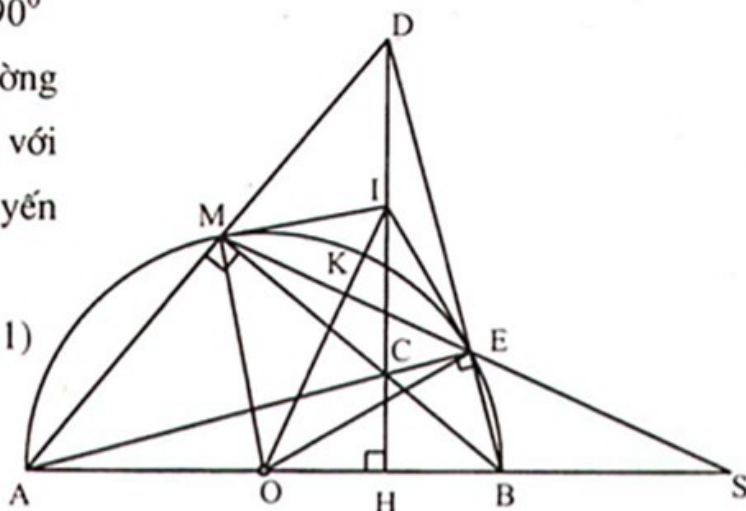
$$\Rightarrow OH.OS = R^2 \Rightarrow OS = \frac{R^2}{OH}.$$

Mà OH cố định  $\Rightarrow OS$  không đổi  $\Rightarrow S$  cố định hay ME luôn đi qua điểm S cố định.

### Chuyên đề 14

24. (h.54) a) Ta có  $\widehat{HKC} = \widehat{HEC} = 90^\circ$  suy ra tứ giác CKHE nội tiếp đường tròn đường kính CH.

b)  $\Delta OBD$  cân tại O có OK là đường cao nên OK cũng là đường phân giác nên  $\widehat{DOA} = \widehat{BOA} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{DEA} = \widehat{ADB}$ , mặt khác  $\widehat{DAE}$  chung nên  $\Delta ADH \sim \Delta AED$  (g.g)



Hình 53

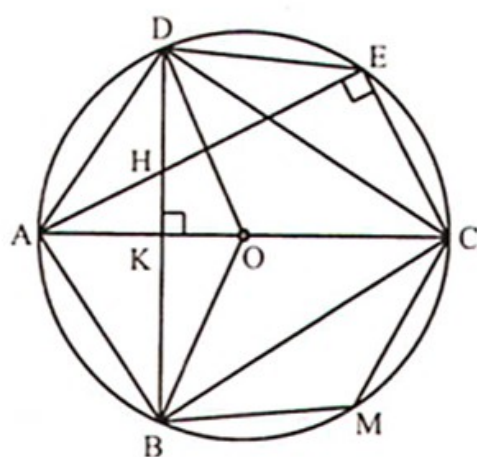
$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AH}{AD} \Rightarrow AD^2 = AH \cdot AE.$$

c)  $BD = 12\text{cm} \Rightarrow KB = 6\text{cm}$

- $\Delta BKC$  vuông tại  $K \Rightarrow BK^2 + KC^2 = BC^2$   
 $\Rightarrow 36 + KC^2 = 100 \Rightarrow KC^2 = 64 \Rightarrow KC = 8\text{cm}.$

$\Delta ABC$  vuông tại  $B$  có  $BK \perp AC$   
 $\Rightarrow BC^2 = CK \cdot AC \Rightarrow 100 = 8 \cdot AC$

$$\Rightarrow AC = \frac{25}{2} \Rightarrow OC = \frac{25}{4}.$$



Hình 54

- Vậy diện tích hình tròn là  $S = \pi R^2 = \frac{625}{16} \pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

d)  $\Delta BCD$  cân tại  $C \Rightarrow \widehat{BDC} = \frac{180^\circ - \widehat{BCD}}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$

Mặt khác,  $M \in (O) \Leftrightarrow BDCM$  nội tiếp

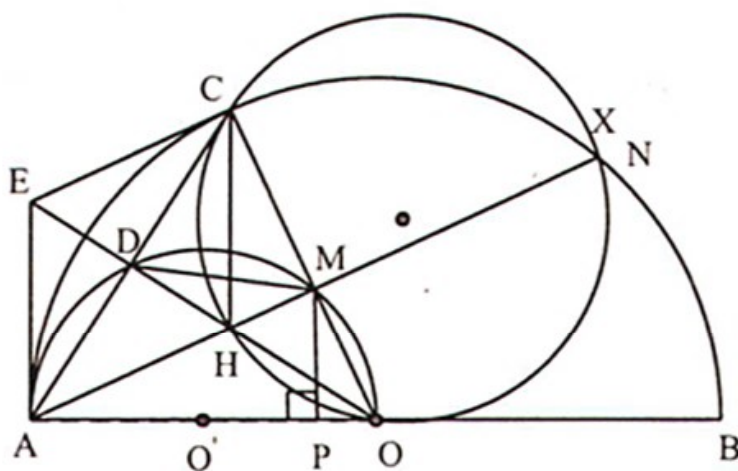
$$\Leftrightarrow \widehat{BDC} + \widehat{BMC} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{BDC} \Leftrightarrow \widehat{BMC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Ta lại có  $\Delta MBC$  cân tại  $M \Rightarrow \widehat{MBC} = \frac{180^\circ - \widehat{BMC}}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{4}.$

25. (h.55) a) Tam giác  $OAC$  cân và  $OD \perp CA$  nên  $\widehat{AOD} = \widehat{DOM}.$   
 Suy ra  $AD = DM$ , do đó  $\Delta ADM$  cân tại  $D$ .

b)  $EA$  là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn đã cho.

c) Giả sử  $AM$  cắt nửa đường tròn  $(O)$  tại  $X$ . Ta có  $H$  là trực tâm của  $\Delta OAC$ , từ đây chứng minh tứ giác  $CHOX$  nội tiếp, suy ra  $X \equiv N$ .



Hình 55

d) Kẻ  $MP \perp AO$ . Giả sử  $ME \parallel AB$ , suy ra  $\Delta EMO$  cân tại  $M$  và  $AEMP$  là hình chữ nhật. Đặt  $MO = ME = AP = x \text{ (} x > 0\text{)}$ . Ta có:

$$MO^2 = OP.OA = (OA - AP)OA \Rightarrow x^2 = (a - x)a \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a.$$

26. (h.56) a) Áp dụng tính chất của tiếp tuyến ta có:

$$AB = AC; PM = PB; QM = QC$$

Chu vi tam giác APQ là:  $AP + PQ + QA$

$$= AP + PM + MQ + QA$$

$$= AP + PB + QC + QA = AB + AC = 2AC.$$

Vậy khi M chuyển động trên cung nhỏ BC thì chu vi tam giác APQ bằng  $2AC$  không đổi.

$$b) \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^\circ.$$

Ta có  $\Delta OAB$  vuông tại B

$$\Rightarrow AB = OB \cdot \cot 30^\circ = 6 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Diện tích tứ giác ABOC là: } S_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} OB \cdot AB = 36\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{Ta có } \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ.$$

$$\text{Diện tích hình quạt của } \widehat{BMC} \text{ là: } S_2 = \frac{\pi R^2 n}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120}{360} = 12\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích phần mặt phẳng được giới hạn bởi hai tiếp tuyến AB, AC và cung nhỏ BC là:

$$S = S_1 - S_2 = 36\sqrt{3} - 12\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

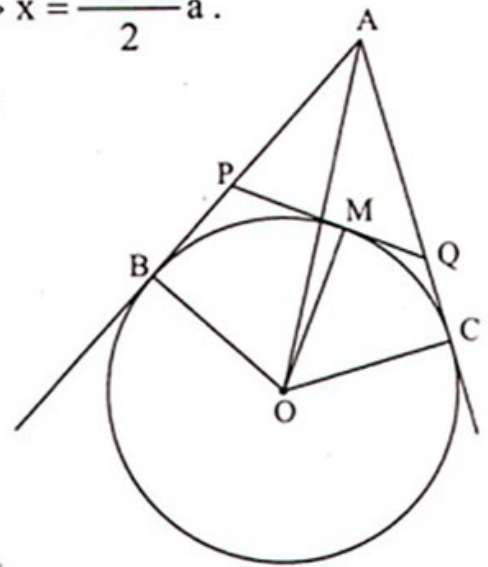
27. (h.57) a) Ta có IO là phân giác của  $\widehat{FIB}$ ,  $IO'$  là phân giác của  $\widehat{BIE}$  mà  $\widehat{BIF}; \widehat{BIE}$  là hai góc kề bù

$$\Rightarrow IO \perp IO' \Rightarrow \Delta OIO' \text{ vuông.}$$

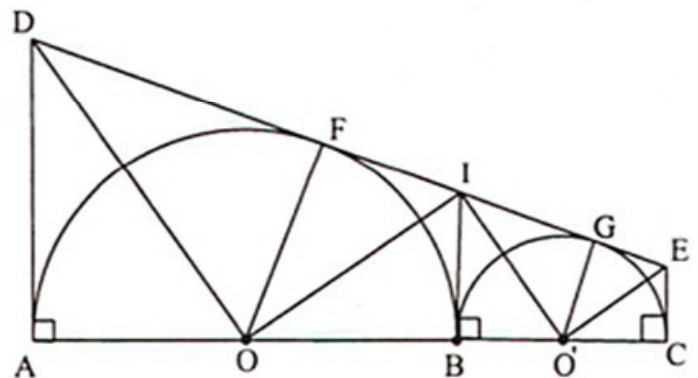
Ta có OD là đường phân giác của  $\widehat{AOF}$ , OI là đường phân giác của  $\widehat{BOF}$  mà  $\widehat{AOF}$  và  $\widehat{BOF}$  là hai góc kề bù

$$\Rightarrow OD \perp OI \Rightarrow \Delta DOI \text{ vuông.}$$

Tương tự ta có  $\Delta IO'E$  vuông.



Hình 56



Hình 57

b) Ta có  $O'C = R \Rightarrow O'B = R \Rightarrow OB = OA = 2R$ .

$\Delta OIO'$  vuông tại I có  $IB \perp OO' \Rightarrow IB^2 = OB \cdot O'B = 2R^2$

$\Rightarrow IB = R\sqrt{2} \Rightarrow IG = R\sqrt{2}$ .

$\Delta IO'E$  vuông tại O' có  $O'G \perp IF \Rightarrow O'G^2 = IG \cdot GE$

$\Rightarrow R^2 = R\sqrt{2} \cdot GE \Rightarrow GE = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ .

Ta có  $IF = IB = R\sqrt{2}$ .

$\Delta ODI$  vuông tại O có  $OF \perp DI \Rightarrow OF^2 = DF \cdot FI$

$\Rightarrow 4R^2 = DF \cdot R\sqrt{2} \Rightarrow DF = 2R\sqrt{2} \Rightarrow AD = DF = 2R\sqrt{2}$ .

c) \* Diện tích hình thang ACED là  $S_1 = \frac{AD + CE}{2} \cdot AC$

$\Rightarrow S_1 = \frac{2R\sqrt{2} + \frac{R\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot 6R = \frac{15R^2\sqrt{2}}{2}$ .

\* Diện tích nửa hình tròn tâm O là  $S_2 = \frac{1}{2}\pi(2R)^2 = 2\pi R^2$ .

\* Diện tích nửa hình tròn tâm O' là  $S_3 = \frac{1}{2}\pi R^2$ .

Diện tích phần nằm trong hình thang nhưng nằm ngoài hai nửa hình tròn là:

$$S_4 = S_1 - (S_2 + S_3) = \frac{5R^2(3\sqrt{2} - \pi)}{2}$$

### Chuyên đề 15

28. (h.58) a)  $\Delta BOC$  cân ( $OB = OC$ ) có OI vừa là trung tuyến vừa là đường phân giác  $\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{MC}$ .

b) Vì  $\widehat{BM} = \widehat{MC}$  suy ra  $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$  (góc nội tiếp) do đó AM là tia phân giác của  $\widehat{BAC}$ .

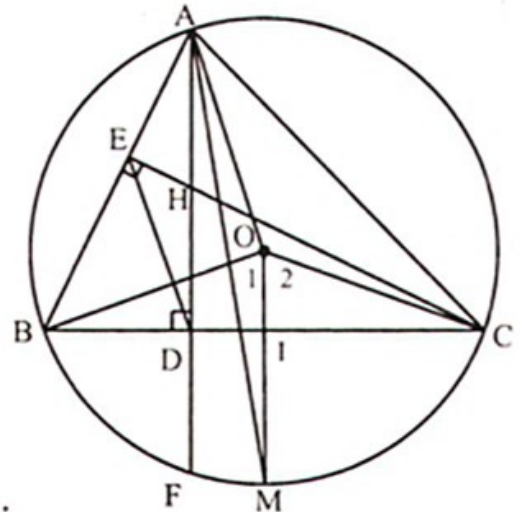
Vì  $AD \parallel OM$  nên  $\widehat{FAM} = \widehat{AMO}$ , mặt khác  $\widehat{AMO} = \widehat{MAO}$ . Suy ra  $\widehat{FAM} = \widehat{MAO}$  nên AM còn là tia phân giác của  $\widehat{FAO}$ .

c) Ta có  $\widehat{BCF} = \widehat{BAF}$  (góc nội tiếp cùng chắn  $\widehat{BF}$ ) và  $\widehat{BCE} = \widehat{BAF}$  (cùng phụ với  $\widehat{ABC}$ ) nên  $\widehat{BCE} = \widehat{BCF}$ .

Mặt khác  $HF \perp BC$  nên  $\Delta CHF$  cân. Suy ra  $DH = DF$ , do vậy hai điểm H, F đối xứng với nhau qua BC.

d) Dụng đường tròn tâm O bán kính  $R = 2,5\text{cm}$

- Dụng  $BC = 4\text{cm}$ ;
- Từ O kẻ  $OM \perp BC$  với M thuộc cung nhỏ BC ;
- Từ M dụng tia Mx sao cho  $\widehat{OMx} = 15^\circ$  (theo chứng minh trên), Mx cắt đường tròn tại A;
- Nối AB, AC được tam giác ABC cân dựng. Bạn đọc tự vẽ hình.



Hình 58

29. (h.59) a) Ta có  $BC \parallel AD$  suy ra  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$  (hai cung chắn giữa hai dây song song)  $\Rightarrow AB = CD$ .

Ta lại có  $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$  (đối đỉnh). (1)

$\widehat{B}_1$  là góc giữa tiếp tuyến và dây AB chắn cung AB;

$\widehat{D}_1$  là góc giữa tiếp tuyến và dây CD chắn cung CD, mà  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$  suy ra

$\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$ . (2)

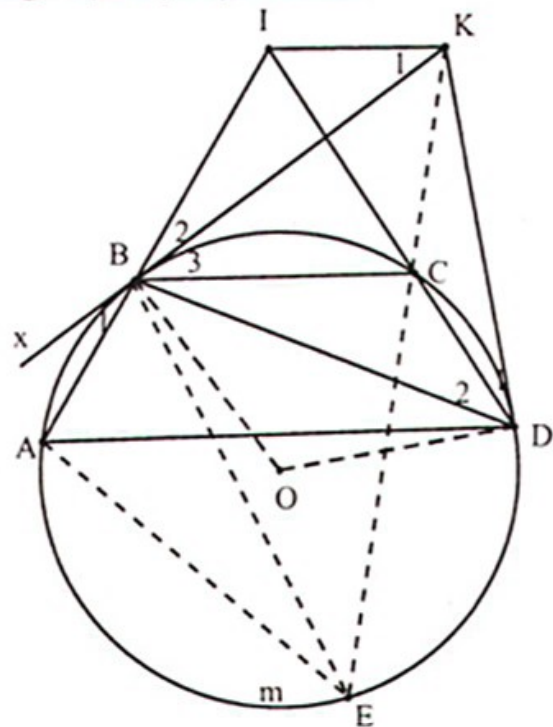
Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{B}_2 = \widehat{D}_1$  (dpcm).

b) Ta có B nhìn IK dưới góc IBK,

D nhìn IK dưới góc IDK, mà  $\widehat{IBK} = \widehat{IDK}$  (cmt), suy ra tứ giác BIKD nội tiếp được, suy ra  $\widehat{K}_1 = \widehat{D}_2$  (góc nội tiếp chắn cung BI). (3)

•  $\widehat{B}_3 = \widehat{D}_2$  (góc giữa tiếp tuyến và dây BC và góc nội tiếp chắn cung BC). (4)

• Từ (3) và (4) được  $\widehat{K}_1 = \widehat{B}_3$ , ở vị trí so le trong, suy ra  $IK \parallel BC$ .



Hình 59



c) Ta có  $IK \parallel AD$  (vì cùng song song  $BC$ ) nên  $AIKD$  là hình bình hành

$$\Leftrightarrow AI \parallel KD \Leftrightarrow \widehat{IDK} = \widehat{AID} \Leftrightarrow sd \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{sd \widehat{AmD} - sd \widehat{BC}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{AmD} = \widehat{BCD} \Leftrightarrow AD = BD.$$

Vậy điều kiện phải tìm là  $AD = BD$ . Bạn đọc tự vẽ hình.

d) *Phân tích*: Giả sử đã dựng được hình, kéo dài  $KC$  cho gặp  $(O)$  tại điểm thứ hai  $E$ , ta có:  $BC = AE$  (vì  $KC \parallel IB$ ). Mà  $AB = CD$  nên  $\widehat{BCD} = \widehat{BC} + \widehat{BE} = \widehat{BAE}$ , suy ra  $BE = BD$ .

*Cách dựng*: (Bạn đọc tự vẽ hình) Dựng dây  $BE = BD$  (tồn tại vì  $BD$  không chứa  $O$ ). Kẻ các tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $B, D$  cắt nhau tại  $K$ . Nối  $KE$  cắt đường tròn tại điểm thứ hai  $C$ . Nối  $BC$ , kẻ dây  $DA \parallel BC$  được hình thang  $ABCD$  phải dựng.

*Chứng minh*: Thật vậy, do  $\widehat{BCD} = \widehat{BAE}$  (cách dựng),

$$\widehat{CD} = \widehat{BA} \text{ (vì } DA \parallel BC \text{) nên } \widehat{BC} = \widehat{BD} - \widehat{CD} = \widehat{BE} - \widehat{AB} = \widehat{AE}.$$

Suy ra  $\widehat{BEC} = \widehat{EBA}$  (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau). Do đó  $AB \parallel CE$ .

Kết hợp với câu a) thì  $IK \parallel BC$ , nên  $BIKC$  là hình bình hành.

*Biện luận*: Vì  $BD$  không chứa  $O$  nên luôn luôn dựng được  $E, K$ ; do đó dựng được  $C, BC$  và  $DA$ . Hơn nữa  $E, K$  duy nhất, do đó  $C, A$  duy nhất và nghiệm hình là duy nhất.

30. (h.60) a)  $\widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMD} = 90^\circ$  mà  $\widehat{BAD} = 90^\circ$ , suy ra tứ giác  $ABMD$  nội tiếp đường tròn đường kính  $BD$ .

b) Xét  $\triangle CBM$  và  $\triangle CDA$  có

$$\widehat{CAD} = \widehat{CMB} = 90^\circ, \widehat{ACD} \text{ chung}$$

$\Rightarrow \triangle CBM \sim \triangle CDA$  (g.g)

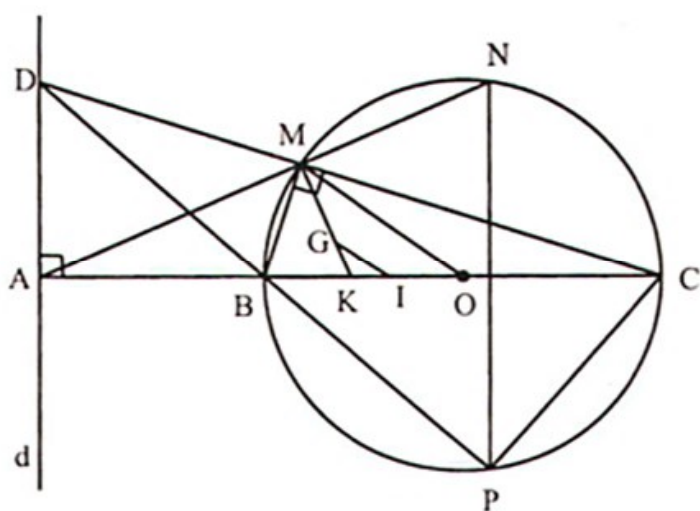
$$\Rightarrow \frac{CB}{CD} = \frac{CM}{CA}$$

$\Rightarrow CD \cdot CM = CA \cdot CB$  không đổi.

Vậy tích  $CD \cdot CM = CA \cdot CB$  không phụ thuộc vào vị trí điểm  $M$ .

c) Áp dụng tính chất góc nội tiếp của tứ giác nội tiếp ta có

$$\widehat{DAM} = \widehat{DBM} = \widehat{MCP} = \widehat{ANP} \Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{ANP} \text{ suy ra } AD \parallel NP.$$



Hình 60

d) Gọi K là trung điểm của AC  $\Rightarrow$  K cố định. Qua G kẻ đường thẳng song song với OM cắt AC tại I  $\Rightarrow \frac{KI}{KO} = \frac{KG}{KM} \Rightarrow \frac{KI}{KO} = \frac{1}{3} \Rightarrow$  I là điểm cố định.

$$GI \parallel MO \Rightarrow \frac{GI}{MO} = \frac{KG}{KM} \Rightarrow \frac{GI}{MO} = \frac{1}{3} \Rightarrow GI = \frac{1}{3}MO = \frac{1}{6}BC.$$

Vậy G thuộc đường tròn cố định  $(I; \frac{1}{6}BC)$ .

31. (h.61) a) d là tiếp tuyến suy ra  $d \perp AB \Rightarrow \widehat{P}_1 = \widehat{B}_1$  (cùng phụ với  $\widehat{B}_2$ )

mà  $\widehat{D}_2 = \widehat{B}_1$  (góc nội tiếp)  $\Rightarrow \widehat{P}_1 = \widehat{D}_2$ .

Mặt khác  $\widehat{D}_2 + \widehat{CDQ} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{P}_1 + \widehat{CDQ} = 180^\circ$$

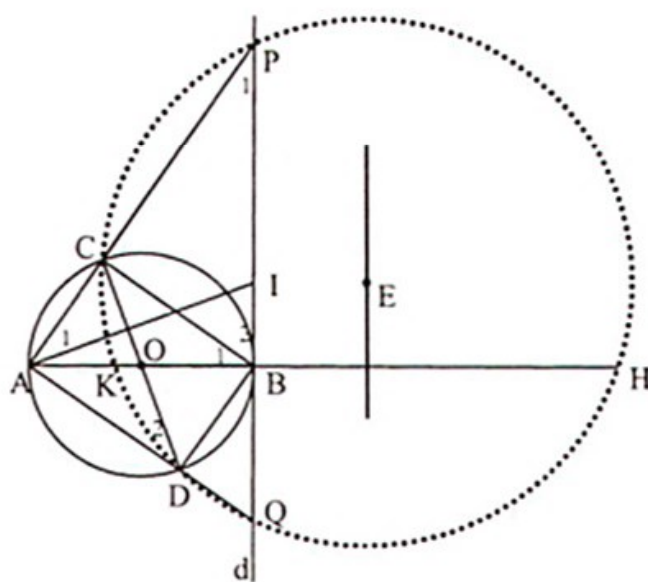
$\Rightarrow$  tứ giác CPQD nội tiếp.

b)  $\triangle APQ$  có  $\widehat{PAQ} = 90^\circ$ , AI là đường trung tuyến  $\Rightarrow IA = IP$

$\Rightarrow \triangle IAP$  cân tại I

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{P}_1 \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{D}_2$$

mà  $\widehat{A}_1 + \widehat{IAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{D}_2 + \widehat{IAD} = 90^\circ \Rightarrow AI \perp CD$ .



Hình 61

c) Gọi K, H là giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn ngoại tiếp  $\triangle CPD$  (K nằm giữa A và H).

$$\text{Ta có } AK \cdot AH = AC \cdot AP = AB^2 \Rightarrow AK \cdot AH = 4R^2. \quad (1)$$

$$BK \cdot BH = BP \cdot BQ = AB^2 \Rightarrow BK \cdot BH = 4R^2$$

$$\Leftrightarrow (AB - AK) \cdot (AH - AB) = 4R^2 \Leftrightarrow AB(AH + AK) = 12R^2$$

$$\Leftrightarrow AK + AH = 6R. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có AK; AH là nghiệm của phương trình:  $X^2 - 6R \cdot X + 4R^2 = 0$ .

$$\text{Giải ra ta được } X_1 = (3 + \sqrt{5})R; X_2 = (3 - \sqrt{5})R.$$

$$\text{Vì } AK < AH \Rightarrow AK = (3 - \sqrt{5})R; AH = (3 + \sqrt{5})R.$$

Từ đó suy ra KH cố định, do đó quỹ tích tâm E của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta CPD$  là đường trung trực của HK cố định.

32. (h.62) a)  $\widehat{PMB} = 90^\circ, \widehat{POB} = 90^\circ$  nên tứ giác OBMP nội tiếp đường tròn đường kính PB.

Từ đó ta có  $\widehat{MBO} = \widehat{DPM}$

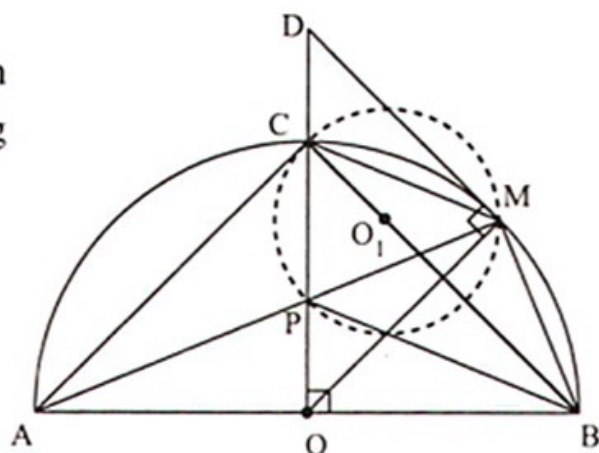
mà  $\widehat{PMD} = \widehat{MBO} \Rightarrow \widehat{PMD} = \widehat{DPM}$

$\Rightarrow \Delta DMP$  cân tại D.

b)  $PO = PM \Leftrightarrow \Delta PMO$  cân tại P

$\Leftrightarrow \widehat{POM} = \widehat{PMO} \Leftrightarrow \widehat{PAO} = \widehat{POM} \Leftrightarrow \widehat{APO} = 2.\widehat{PAO}$

$\Leftrightarrow \widehat{MBA} = 2.\widehat{PAO} \Leftrightarrow \widehat{PAO} = 30^\circ, \widehat{MBA} = 60^\circ.$



Hình 62

Cách dựng điểm P : Trên nửa mặt phẳng bờ AB dựng  $\widehat{BAx} = 30^\circ$ , tia Ax cắt OC tại P.

c)  $MP = MB \Leftrightarrow \Delta MPB$  vuông cân tại M  $\Leftrightarrow \widehat{MPB} = 45^\circ \Leftrightarrow \widehat{MOB} = 45^\circ.$

Cách dựng điểm M: Dựng tia phân giác của góc  $\widehat{COB}$  cắt nửa đường tròn tại M.

Ta có  $\widehat{MOB} = 45^\circ$ , kẻ  $MH \perp AB$  ta có  $MH = MO.\sin 45^\circ = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$

Khi đó diện tích tam giác AMB là:  $S = \frac{1}{2} AB.MH = \frac{R^2\sqrt{2}}{2}.$

d) Ta có  $\widehat{ACO} = \widehat{AMC} \Rightarrow AC$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta CPM.$

Gọi  $O_1$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta CPM \Rightarrow O_1C \perp CA.$

Mà  $BC \perp CA \Rightarrow C, O_1, B$  thẳng hàng  $\Rightarrow O_1$  nằm trên đường thẳng BC cố định.

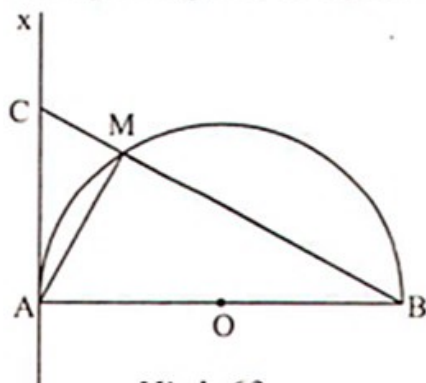
### Chuyên đề 16

33. (h.63)  $\Delta ABC$  vuông tại A, có  $AM \perp BC$  nên  $BM.BC = AB^2 = 4R^2.$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$2BM + BC \geq 2.\sqrt{2BM.BC} = 2.\sqrt{8R^2} = 4R\sqrt{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất là  $4R\sqrt{2}$  khi  $2.BM = BC$



Hình 63

$\Leftrightarrow MB = MC \Leftrightarrow M$  là điểm chính giữa của nửa đường tròn.

34. (h.64) Ta có  $MH^2 + HO^2 = OM^2 = R^2$

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$S_{OMH} = \frac{1}{2} MH \cdot HO \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{MH^2 + HO^2}{2} = \frac{R^2}{4}.$$

Vậy diện tích tam giác OMH lớn nhất là

$$\frac{R^2}{4} \text{ khi } MH = HO$$

$\Leftrightarrow \widehat{AOM} = 45^\circ$  hoặc  $\widehat{BOM'} = 45^\circ$ .

b) Áp dụng bất đẳng thức:  $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ ; ta có:

$$\left(\frac{MH+HO}{2}\right)^2 \leq \frac{MH^2+HO^2}{2} = \frac{R^2}{2} \Leftrightarrow MH+HO \leq R\sqrt{2}.$$

Ta có chu vi  $\Delta MOH$  là  $MO + MH + HO \leq R + R\sqrt{2}$ .

Vậy chu vi  $\Delta MHO$  lớn nhất là  $R(1+\sqrt{2})$  khi  $MH = HO \Leftrightarrow \widehat{AOM} = 45^\circ$  hoặc  $\widehat{BOM'} = 45^\circ$ .

35. (h.65) a)  $\widehat{ACB} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), mặt khác  $HE \perp AC$ ,  $HF \perp BC$  (gt) nên  $\widehat{CEH} = \widehat{CFH} = 90^\circ$  do đó CEHF là hình chữ nhật, suy ra  $EF = CH$ .

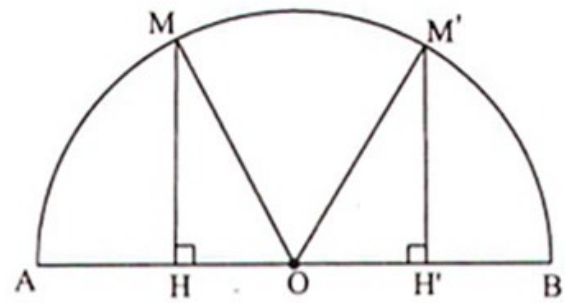
EF lớn nhất  $\Leftrightarrow$  CH lớn nhất. Mà  $CH \leq CO$  nên CH lớn nhất

$\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow CO \perp AB \Leftrightarrow C$  là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O).

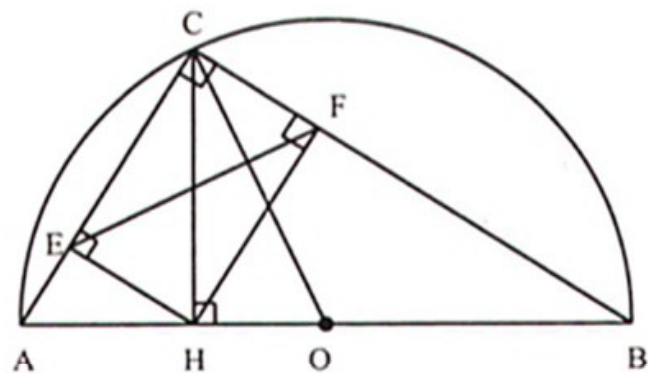
Vậy EF lớn nhất bằng R khi C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O).

b) Áp dụng hệ thức lượng vào các tam giác vuông HAC và HBC ta có:

$$CH^2 = CE \cdot CA ; CH^2 = CF \cdot CB \Rightarrow CH^4 = CE \cdot CF \cdot CA \cdot CB.$$



Hình 64



Hình 65

Mặt khác,  $CA.CB = CH.AB \Rightarrow CH^4 = CE.CF.AB.CH \Rightarrow CE.CF = \frac{CH^3}{AB}$ .

$S_{CEHF} = CE.CF$  lớn nhất  $\Leftrightarrow CH$  lớn nhất  $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow OC \perp AB$

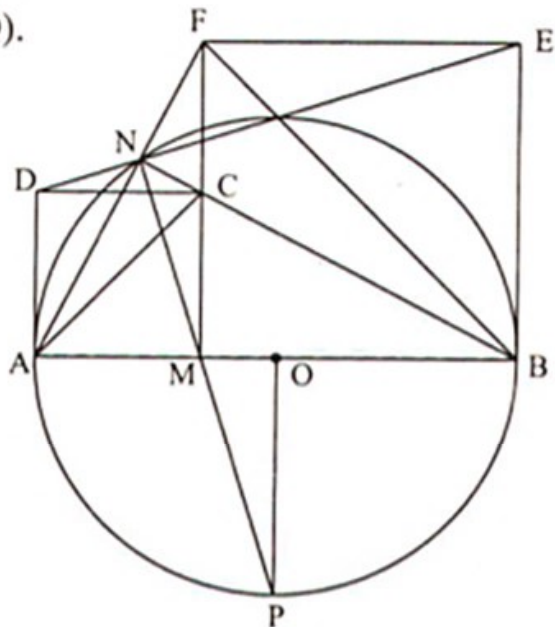
$\Leftrightarrow C$  là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O).

36. (h.66) a) Vì  $\widehat{CAB} + \widehat{FBA} = 90^\circ$  nên  $AC \perp BF$ , mà  $FM \perp AB$  suy ra  $C$  là trực tâm của  $\triangle ABF$  do đó  $BC \perp AF$ . Vì  $\widehat{ANC} = \widehat{BNF} = 90^\circ$  nên  $N$  nằm trên hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông  $AMCD$  và  $MBEF$ .

b) Do  $\widehat{MND} = \widehat{MNE} = 90^\circ$  nên  $D, N, E$  thẳng hàng và  $MN \perp DE$ .

c)  $N$  nằm trên hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông  $AMCD$  và  $MBEF$

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{BNM} = 45^\circ$ .



Hình 66

Ta có  $A, B$  cố định,  $\widehat{ANB} = 90^\circ$  nên  $N$  thuộc đường tròn đường kính  $AB$ . Dựng đường tròn đường kính  $AB$  và gọi  $P$  là giao điểm thứ hai của  $MN$  với đường tròn đó. Vì  $\widehat{ANM} = \widehat{BNM} = 45^\circ \Rightarrow P$  là điểm chính giữa của cung  $AB$ , do đó  $P$  là điểm cố định. Vậy  $MN$  luôn đi qua  $P$ .

d) Gọi  $O$  là trung điểm của  $AB$ .

Ta có  $PN \leq AB$  và  $PM \geq PO = \frac{1}{2}AB \Rightarrow MN \leq \frac{1}{2}AB$ .

Vậy giá trị lớn nhất của  $MN$  là  $\frac{1}{2}AB$  khi  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

37. (h.67) a) Ta có  $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BD}$ . (1)

Ta có  $DI = DB \Rightarrow \triangle DBI$  cân tại  $D \Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DBI}$ .

Mặt khác  $\widehat{DIB} = \frac{sd\widehat{BD} + sd\widehat{CK}}{2}$ ;  $\widehat{DBK} = \frac{sd\widehat{AD} + sd\widehat{AK}}{2}$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{AK} = \widehat{CK} \Rightarrow AK = CK \Rightarrow \triangle ACK$  cân tại  $K$ .

b) Ta có  $\widehat{AK} = \widehat{CK} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \Rightarrow BK$  là tia phân giác  $\widehat{ABC}$ .

$\Delta ABC$  có  $CD$ ;  $BK$  là các tia phân giác cắt nhau tại  $I$ .

Từ đó suy ra tia  $AI$  là tia phân giác của  $\widehat{BAC}$ .

Gọi  $E$  là giao điểm thứ hai của  $AI$  với đường

tròn  $(O)$ . Từ  $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CE}$

$\Rightarrow E$  là điểm cố định.

$$\text{Ta có: } \widehat{CIE} = \frac{sd\widehat{AD} + sd\widehat{CE}}{2};$$

$$\widehat{ICE} = \frac{sd\widehat{BD} + sd\widehat{BE}}{2}.$$

Mà  $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ ;  $\widehat{CE} = \widehat{BE} \Rightarrow \widehat{CIE} = \widehat{ICE}$

$\Rightarrow \Delta CIE$  cân tại  $E \Rightarrow IE = CE$  không đổi.

Mặt khác  $AI = AE - EI$  nên  $AI$  lớn nhất  $\Leftrightarrow AE$  lớn nhất, mà  $AE \leq 2R$  nên  $AE$  lớn nhất bằng  $2R$  khi  $EA$  là đường kính. Vậy  $AI$  lớn nhất bằng  $2R - CE$  khi  $AE$  là đường kính hay  $A$  là điểm chính giữa của cung lớn  $BC$ .

b) Bạn xem lời giải ở ví dụ 25.

38. (h.68) a) Ta có  $\widehat{OHM} = 90^\circ$ ;  $\widehat{ODM} = 90^\circ$  suy ra các điểm  $M, D, O, H$  cùng nằm trên đường tròn đường kính  $OM$ .

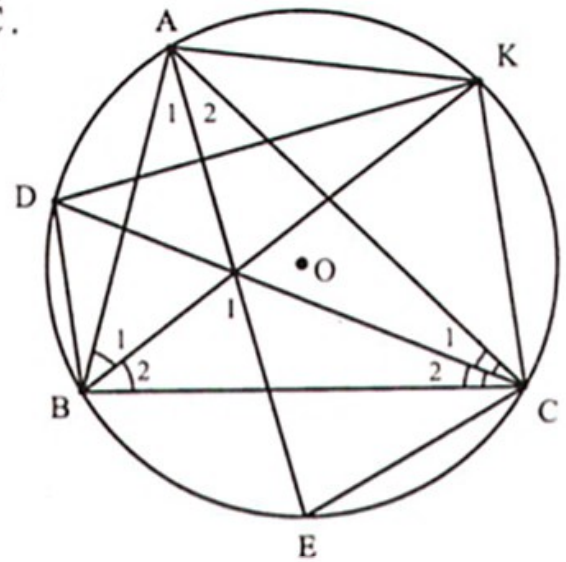
b) Theo tính chất tiếp tuyến, ta có  $MI$  là đường phân giác của  $\widehat{CMD}$ .

Ta có  $OI$  là đường phân giác của  $\widehat{COD}$  nên  $\widehat{CI} = \widehat{DI}$ .

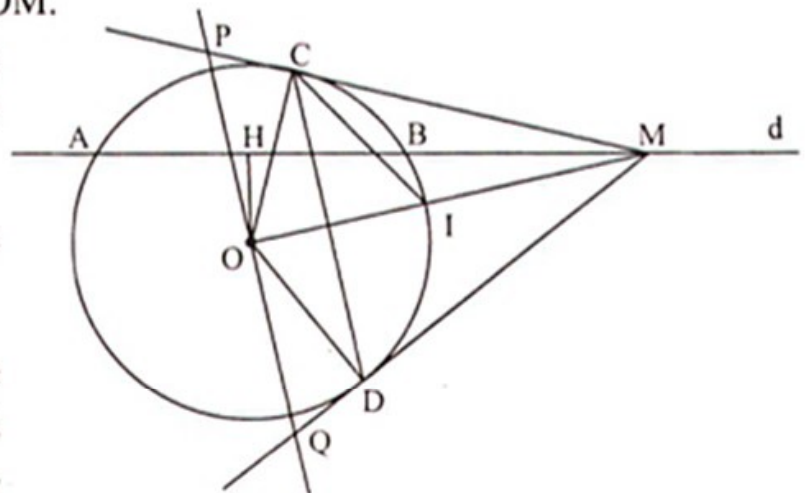
Từ đó suy ra  $\widehat{DCI} = \widehat{MCI}$  (góc giữa tiếp tuyến và dây) hay  $CI$  là đường phân giác của  $\widehat{MCD}$ . Vậy  $I$  là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác  $MCD$ .

c) Ta có tam giác  $MPQ$  cân tại  $M$  có  $MO$  là đường trung trực nên

$$S_{MPQ} = 2.S_{OQM} = 2 \cdot \frac{1}{2} OD \cdot QM = R(MD + DQ).$$



Hình 67



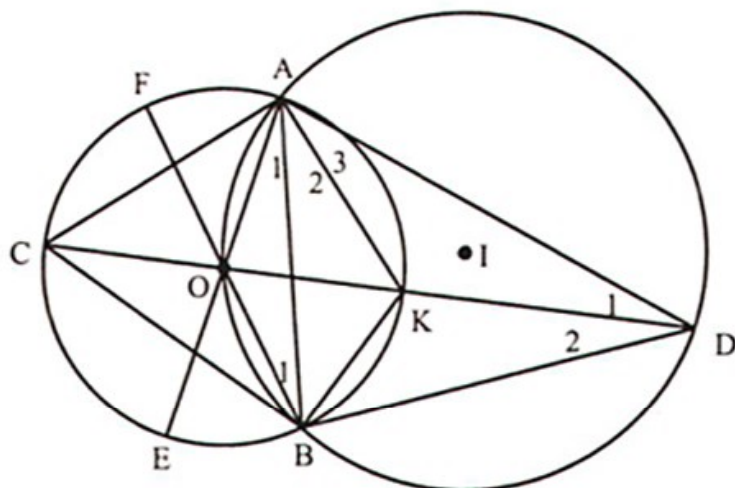
Hình 68

Từ đó  $S$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow MD + DQ$  nhỏ nhất.

Ta có  $MD + DQ \geq 2 \cdot \sqrt{MD \cdot DQ} = 2\sqrt{OD^2} = 2R \Rightarrow MD + DQ \geq 2R$ .

Vậy diện tích  $S$  nhỏ nhất  $= 2R^2$  khi  $MD = DQ \Leftrightarrow MO = R\sqrt{2}$  hay  $M$  là giao điểm của  $d$  với đường tròn  $(O; R\sqrt{2})$ .

39. (h.69) a)  $\widehat{OBA} = \widehat{ODA}$  (góc nội tiếp của  $(I)$ ),  $\widehat{ABK} = \widehat{ACK}$  (góc nội tiếp của  $(O)$ ) mà  $\widehat{ODA} + \widehat{ACK} + \widehat{CAD} = 180^\circ$   
 $\Rightarrow \widehat{OBA} + \widehat{ABK} + \widehat{CAD} = 180^\circ$   
 hay  $\widehat{OBK} + \widehat{CAD} = 180^\circ$ .



Hình 69

b) Xét đường tròn  $(I)$  có  $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1; \widehat{D}_2 = \widehat{A}_1$  mà  $\Delta OAB$  cân tại  $O \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$

$\Rightarrow DO$  là đường phân giác của  $\widehat{ADB}$ . (1)

Xét đường tròn  $(I)$  có  $\widehat{BOD} = \widehat{BAD}$ .

Xét đường tròn  $(O)$  có  $\widehat{BOK} = 2 \cdot \widehat{A}_2 \Rightarrow \widehat{BAD} = 2 \cdot \widehat{A}_2$

$\Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 \Rightarrow AK$  là đường phân giác của  $\widehat{BAD}$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $K$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\Delta ABD$ .

c) Kẻ  $AH \perp CD, BJ \perp CD$ . Ta có  $S_{ACBD} = S_{ACD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}CD \cdot AH + \frac{1}{2}CD \cdot BJ$

$\Rightarrow S_{ACBD} = \frac{1}{2}CD \cdot (AH + BJ) \leq \frac{1}{2}CD \cdot AB$ .

Vậy  $S_{ACBD}$  lớn nhất khi  $AH + BJ = AB$  và  $CD$  lớn nhất

$\Leftrightarrow CD \perp AB$  hay  $C$  là điểm chính giữa của  $\widehat{EF}$ .

## CÁC ĐỀ THAM KHẢO

### Đề số 1

#### Bài 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{2 + \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3}(2 - 3) + (2 + \sqrt{3}) = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 4)(5 + 2\sqrt{3})}{13}} - \sqrt{\frac{(3\sqrt{3} - 4)(2\sqrt{3} - 1)}{11}} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \sqrt{2} \cdot B &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } B = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

c) Điều kiện  $x \geq 1$ .

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 1} + 1} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 1)^2} - \sqrt{x - 1} \\ &= |\sqrt{x - 1} - 1| - \sqrt{x - 1}. \end{aligned}$$

- Nếu  $\sqrt{x - 1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$  thì  $B = -1$ .
- Nếu  $\sqrt{x - 1} - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$  thì  $B = 1 - 2\sqrt{x - 1}$ .

**Bài 2.** Gọi số chi tiết máy tổ I sản xuất trong tháng trước là  $x$  ( $x$  nguyên dương).

Gọi số chi tiết máy tổ II sản xuất trong tháng trước là  $y$  ( $y$  nguyên dương).

$$\text{Đưa tới hệ phương trình: } \begin{cases} x + y = 800 \\ \frac{9}{100}x + \frac{10}{100}y = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 500 \\ y = 300. \end{cases}$$



**Bài 3.** a)  $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=3 \\ -m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=4.$

b) Thay  $x=5; y=12$  vào hàm số  $y=(m-1)x+2$   
ta được  $12=(m-1)5+2 \Leftrightarrow m=3.$

Thay  $x=5; y=12$  vào hàm số  $y=3x-m$   
ta được  $12=3.5-m \Leftrightarrow m=3.$

Vậy với  $m=3$  thì  $(d_1)$  và  $(d_2)$  cắt nhau tại điểm  $M(5; 12).$

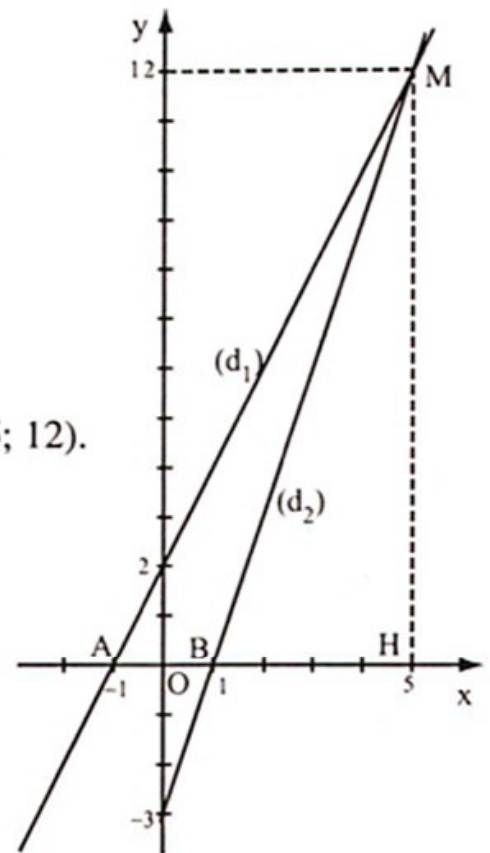
c) (h.70) Với  $m=3$  thì  $(d_1)$  là  $y=2x+2.$

Cho  $y=0$  thì  $x=-1.$  Vậy  $(d_1)$  cắt trục hoành tại  $A$  có hoành độ là  $x=-1.$

Với  $m=3$  thì  $(d_2)$  là  $y=3x-3.$

Cho  $y=0$  thì  $x=1.$  Vậy  $(d_2)$  cắt trục hoành tại  $B$  có hoành độ là  $x=1.$

Ta có  $AB = |-1| + 1 = 2.$



Hình 70

Vậy diện tích  $\Delta MAB$  là :  $S = \frac{1}{2} AB.MH = \frac{1}{2} .2.12 = 12$  (đvdt).

**Bài 4.** (h.71)

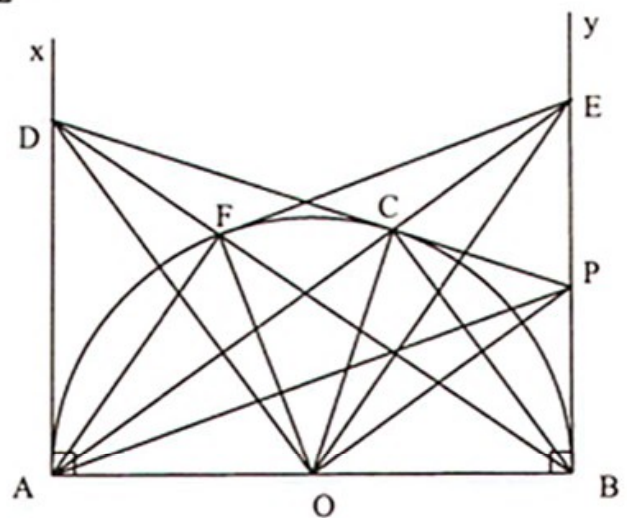
a) Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có  $OD$  là tia phân giác của  $\widehat{AOC}$ ,  $OP$  là tia phân giác của  $\widehat{BOC}$ .  
Mà  $\widehat{AOC}$  và  $\widehat{BOC}$  là hai góc kề bù, nên  $OP \perp OD \Rightarrow \Delta POD$  vuông tại  $O.$

b)  $PB = PC \Rightarrow \Delta BPC$  cân có  $PO$  là đường phân giác nên  $PO$  là đường cao  
 $\Rightarrow PO \perp BC \Rightarrow PO // AC.$

Từ đó ta có  $PO$  là đường trung bình trong tam giác  $ABE \Rightarrow PB = PE.$

c) Từ  $CP.CD = OC^2 \Rightarrow BP.AD = OA.OB \Rightarrow 2BP.AD = 2OA.OB \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{OB}{AD}$

$\Rightarrow \Delta BEO \sim \Delta ABD$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{BEO} = \widehat{ABD}.$  Từ đó suy ra  $BD \perp OE.$



Hình 71

$$d) \text{ Tương tự ta có } \triangle ADO \sim \triangle BAE \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{OA}{BE}. \quad (1)$$

$$\text{Mà } \triangle ABD \sim \triangle FBA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{FA}{FB}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{OA}{BE} = \frac{FA}{FB}.$$

Mặt khác  $\widehat{OAF} = \widehat{EBF}$  nên  $\triangle OAF \sim \triangle EBF$  (c.g.c).

Kết hợp với  $OA = OF$  suy ra  $EF = EB$ .

Do đó  $\triangle EFO = \triangle EBO$  (c.c.c) nên  $\widehat{EFO} = \widehat{EBO} = 90^\circ$ . Vậy  $EF$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Bài 5.** Ta có:

$$P = (x - 4\sqrt{x} + 4) + \left( \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} - 4 \right) + 10 = (\sqrt{x} - 2)^2 + \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{\sqrt{x} + 3} + 10 \geq 10.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P$  là 10 khi  $x = 4$ .

## Đề số 2

$$\text{Bài 1. a) ĐK: } x \geq 0; x \neq 1; P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}.$$

$$b) P < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x + 2\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} + 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{x + \sqrt{x} + 1} < 0.$$

Vì  $x \neq 1$  nên bất đẳng thức cuối đúng, suy ra  $P < \frac{1}{3}$ .

$$c) P = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \frac{1}{2})(\sqrt{x} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = 4. \end{cases}$$

**Bài 2.** Gọi vận tốc lúc về là  $x$  km/h ( $x > 0$ ).

$$\text{Đã tới phương trình: } \frac{60}{x+10} + \frac{60}{x} = \frac{11}{5}.$$

Tìm được nghiệm  $x_1 = 50$  (thỏa mãn điều kiện);  $x_2 = -\frac{60}{11}$  (loại).

**Bài 3.** a) Thay  $x = -1$ ;  $y = -1$  vào hàm số  $y = (m + 2)x + m + 1$

ta được  $0 \cdot m = 0$  (đúng với mọi  $m$ ).

Tọa độ của điểm  $M$  thỏa mãn hàm số đã cho nên (d) luôn đi qua  $M(-1; -1)$ .

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$\text{Ta có } (m + 2)x + m + 1 = -x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m + 2)x + m + 1 = 0$$

$$\Delta = (m + 2)^2 - 4(m + 1) = m^2.$$

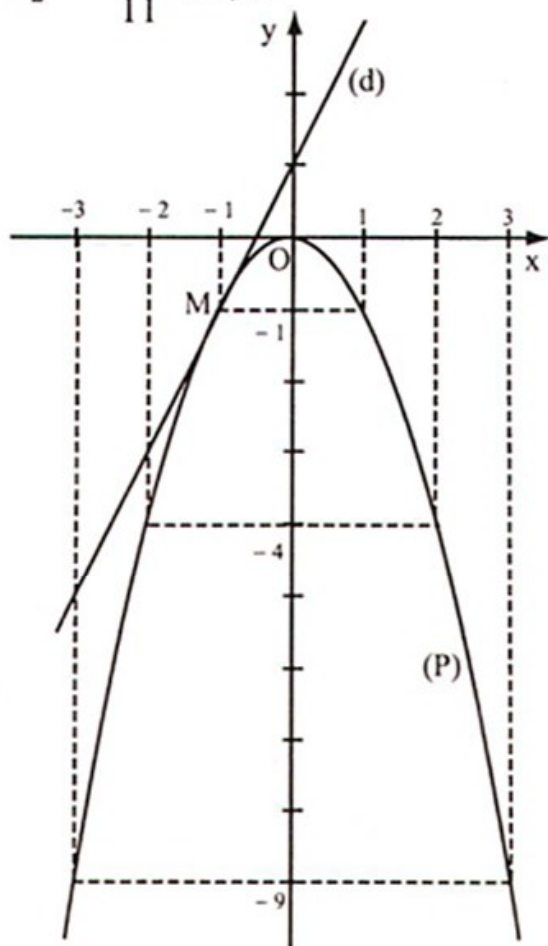
(d) và (P) tiếp xúc khi và chỉ khi  $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 0$ .

Hoành độ của tiếp điểm là

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(m + 2)}{2} = -1.$$

Khi đó  $y = -1$ .

c) Với  $m = 0$  ta vẽ đồ thị của các hàm số  $y = 2x + 1$  và  $y = -x^2$  (h.72).



Hình 72

**Bài 4.** (h.73) a)  $\widehat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEM} = 90^\circ$   
mà  $\widehat{BHM} = 90^\circ$  nên tứ giác BEMH nội tiếp đường tròn đường kính BM.

b)  $\Delta AEB \sim \Delta AHM$  (g.g)

nên  $AE \cdot AM = AB \cdot AH$ .

$\Delta AFB \sim \Delta AHN$  (g.g)

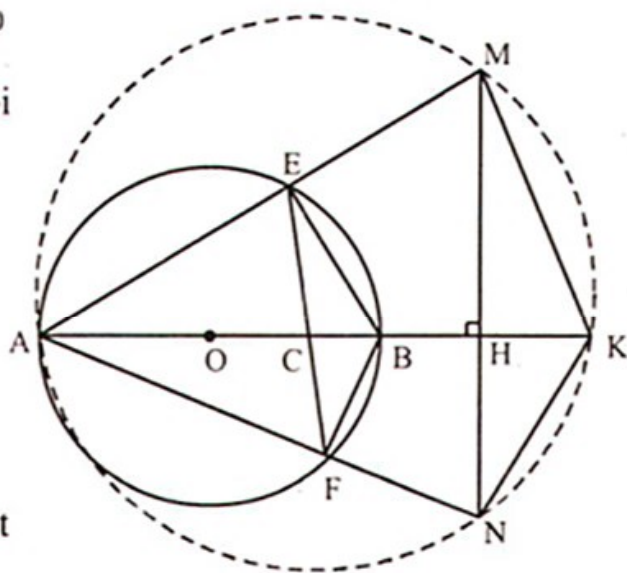
nên  $AF \cdot AN = AB \cdot AH$ .

Suy ra:  $AE \cdot AM = AF \cdot AN$ .

c) Vẽ đường tròn ngoại tiếp  $\Delta AMN$  cắt đường thẳng AB tại K.

Sử dụng các góc nội tiếp, tứ giác nội tiếp ta có:

$$\widehat{AKN} = \widehat{AMN} = \widehat{ABE} = \widehat{AFC} \Rightarrow \Delta AFC \sim \Delta AKN \text{ (g.g)} \Rightarrow AC \cdot AK = AF \cdot AN.$$



Hình 73

Mà  $AF \cdot AN = AB \cdot AH$  nên  $AC \cdot AK = AB \cdot AH$

$$\Rightarrow AK = \frac{AB \cdot AH}{AC} \text{ không đổi} \Rightarrow K \text{ là điểm cố định.}$$

d) Từ câu c) ta có  $AK = \frac{AB \cdot AH}{AC} = \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{20}{3} \text{ cm} \Rightarrow HK = AK - AH \Rightarrow HK = \frac{5}{3} \text{ cm.}$

Mặt khác  $\Delta HMA \sim \Delta HKN$  (g.g)  $\Rightarrow HM \cdot HN = HA \cdot HK \Rightarrow HM \cdot HN = 5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{3}$ .

Ta có  $\Delta AMN$  có đường cao  $AH = 5 \text{ cm}$  không đổi.

Suy ra  $S_{AMN}$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow MN$  nhỏ nhất.

Mà  $MN = MH + HN \geq 2\sqrt{MH \cdot HN} = 2 \cdot \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$

Do đó giá trị nhỏ nhất của diện tích  $\Delta AMN$  là:  $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$ ,

khi  $HM = HN \Leftrightarrow EF \perp AB$  tại  $C$ .

**Bài 5.** Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  bán kính  $R$ , kẻ đường kính  $AD$  của đường tròn đó. Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$  (h.74).

Ta có  $BH \parallel CD$ ,  $CH \parallel BD$ , suy ra  $BDCH$  là hình bình hành  $\Rightarrow BH = CD$ .

Xét tam giác  $ACD$  có  $\widehat{ACD} = 90^\circ$  nên

$$\sin \widehat{D_1} = \frac{AC}{AD}, \cos \widehat{D_1} = \frac{CD}{AD} \text{ mà } \widehat{ABC} = \widehat{D_1}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{2R}, \cos \widehat{ABC} = \frac{BH}{2R}.$$

Tương tự, ta có:

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{2R}, \cos \widehat{BAC} = \frac{AH}{2R},$$

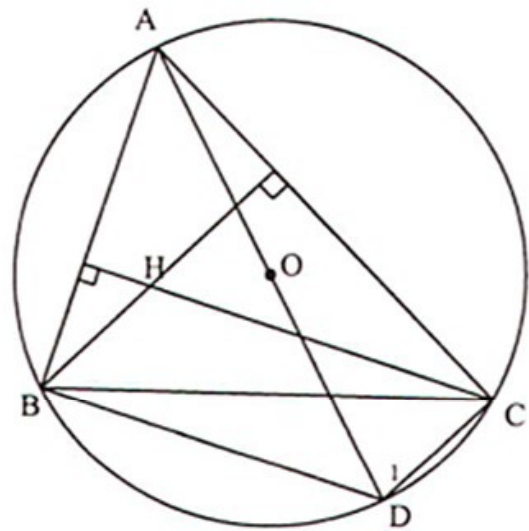
$$\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{2R}, \cos \widehat{ACB} = \frac{CH}{2R}.$$

Do đó  $\sin A + \sin B + \sin C < 2(\cos A + \cos B + \cos C)$

$$\Leftrightarrow BC + AC + AB < 2(AH + BH + CH). \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$AH + BH > AB, AH + CH > AC, BH + CH > BC.$$



Hình 74

Cộng các bất đẳng thức cùng chiều ta có bất đẳng thức (\*) được chứng minh, suy ra điều phải chứng minh.

### Đề số 3

Bài 1. a) Điều kiện:  $x, y \geq 0; x \neq y; P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ .

$$b) P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{4x}} = \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}.$$

$$c) \frac{1}{P} \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} x, y \geq 0; x \neq y \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0; y \geq 0 \text{ và } x \neq y.$$

Với điều kiện này thì  $P > 0$ .

$$\text{Do đó } P + \frac{1}{P} \geq 2\sqrt{P \cdot \frac{1}{P}} = 2 \text{ (bất đẳng thức Cô-si).}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } P = \frac{1}{P} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = x \Leftrightarrow \sqrt{y}(\sqrt{y} + 2\sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ (vì } \sqrt{y} + 2\sqrt{x} \neq 0).$$

$$\text{Do đó } P + \frac{1}{P} = 2 \text{ khi } x > 0 \text{ và } y = 0.$$

$$\text{Bài 2. a) } x_1 = \frac{1}{4}; x_2 = -\frac{1}{2}. \quad b) x = \pm\sqrt{5}; \quad c) x_{1,2} = \frac{\sqrt{10}}{5}; \quad d) \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 3. a)  $m < 2$ .

b) Thay  $x = 2; y = 3$  vào hàm số đã cho ta tính được  $m = 3$ .

c) Nếu  $m = 2$  thì đường thẳng (d) là  $y = 1$ , có khoảng cách từ O đến (d) là  $h = 1$ (\*).  
Nếu  $m \neq 2$  thì (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là  $\frac{1}{2-m}$ .

$$\text{Ta có } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2-m}\right)^2} = 1 + (2-m)^2 > 1 \text{ (vì } m \neq 2).$$

Suy ra  $h^2 < 1$ , do đó  $h < 1$ . (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) suy ra  $\max h = 1$  khi  $m = 2$ .

**Bài 4.** (h.75) a)  $MA = MB = MC$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $A \Rightarrow BD$  là đường kính của đường tròn  $(O)$ .

Ta lại có  $D, E$  đối xứng qua  $A$  mà  $AB \perp DE$  nên tam giác  $BDE$  cân tại  $B$

$$\Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{BDA}. \quad (1)$$

Mặt khác  $\widehat{BMD} = 90^\circ$ ,  $MC = MB$  nên tam giác  $BDC$  cân tại  $D$ .

$$\text{Từ đó suy ra } \widehat{BDA} = 2\widehat{BCD}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \widehat{BEC} = 2\widehat{ACB}.$$

b) Ta có  $\triangle CAM \sim \triangle CBD$

$$\text{nên } CD \cdot CA = CM \cdot CB = \frac{BC^2}{4}.$$

c) Tam giác  $MAC$  cân tại  $M$  nên  $\widehat{MCA} = \widehat{MAC}$ ;  $\widehat{MAC} = \widehat{EAF}$

$$\Rightarrow \widehat{BEC} = 2\widehat{EAF} \Rightarrow \text{tam giác } EAF \text{ cân tại } E \Rightarrow EA = EF.$$

Ta có:  $BD = BE$  nên  $CD = BE$ .

Mà  $EF = AE$  nên  $AD = EF$ . Suy ra  $CD + AD = BE + EF$ . Vậy  $AC = BF$ .

d) Ta có  $AE = AD$ .

$MDFE$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow AM = AF \Leftrightarrow DM = DA \Leftrightarrow$  tam giác  $ABM$  cân tại  $B$ .

Vậy tam giác  $ABM$  đều thì tứ giác  $MDFE$  là hình bình hành.

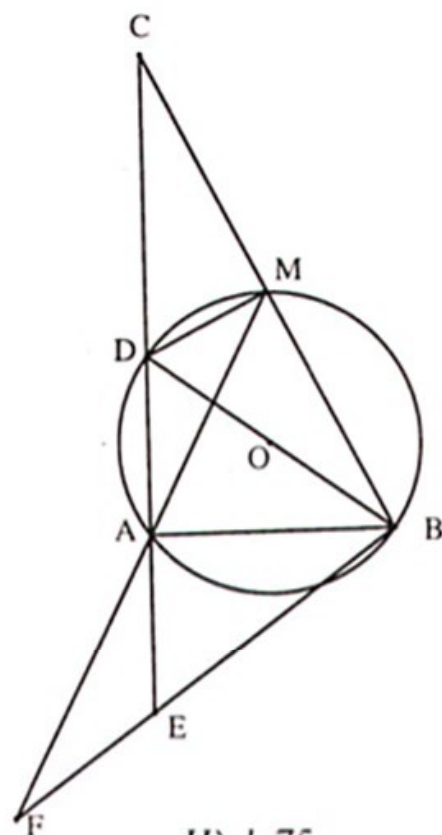
$$\text{Bài 5. Ta có: } \frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}} = \frac{2(a+b)}{\sqrt{4a(3a+b)} + \sqrt{4b(3b+a)}}. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương ta được:

$$\sqrt{4a(3a+b)} \leq \frac{4a + (3a+b)}{2} = \frac{7a+b}{2}. \quad (2)$$

$$\sqrt{4b(3b+a)} \leq \frac{4b + (3b+a)}{2} = \frac{7b+a}{2}. \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra: } \sqrt{4a(3a+b)} + \sqrt{4b(3b+a)} \leq 4a + 4b. \quad (4)$$



Hình 75

Từ (1) và (4) suy ra:

$$\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}} \geq \frac{2(a+b)}{4a+4b} = \frac{1}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ .

## ĐỀ SỐ 4

**Bài 1.** a) Điều kiện :  $x \geq 0$ ;  $x \neq 1$ ;  $P = x - \sqrt{x}$ .

b)  $x = 13 - 4\sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2\sqrt{3} - 1$ . Do đó  $P = 14 - 6\sqrt{3}$ .

c)  $P = x - \sqrt{x} = x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ .

Do đó  $\min P = -\frac{1}{4}$  khi  $x = \frac{1}{4}$ .

**Bài 2.** Gọi vận tốc riêng của ca nô là  $x$  (km/h).

Gọi vận tốc của dòng nước là  $y$  (km/h) ( $x > y > 0$ ).

Dẫn tới hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(x+y) + 3(x-y) = 195 \\ 3(x+y) + 2(x-y) = 205 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 5. \end{cases}$$

**Bài 3.** a) Khi  $m = 3$  ta giải phương trình  $4x^2 - 4x + 1 = 0$  được  $x_{1,2} = \frac{1}{2}$ .

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ (m-1)^2 - (m+1)(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 3 \end{cases} \quad (*)$$

c) Theo hệ thức Vi-ét ta có  $x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1}$ ;  $x_1 x_2 = \frac{m-2}{m+1}$ .

Do đó  $4(x_1 + x_2) = 7x_1 x_2 \Leftrightarrow \frac{8(m-1)}{m+1} = \frac{7(m-2)}{m+1} \Leftrightarrow m = -6$  (thỏa mãn (\*)).

**Bài 4.** (h.76) a) Tứ giác ABCM nội tiếp đường tròn(O)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AMD}$  (cùng bù với  $\widehat{AMC}$ ).

Ta có  $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$  (góc nội tiếp).

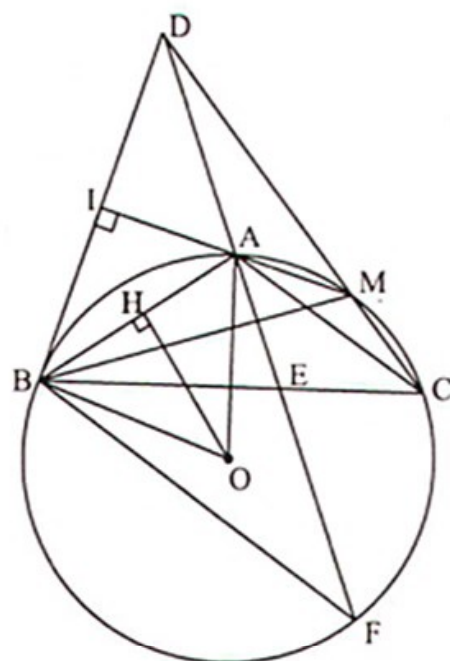
Theo giả thiết  $\widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AMB}$  hay MA là tia phân giác của  $\widehat{BMD}$ .

b)  $\Delta BMD$  có MI là đường phân giác, đồng thời là đường cao nên  $\Delta BMD$  cân tại M, suy ra MI là đường trung trực của BD  $\Rightarrow AB = AD$ .

Mặt khác,  $\widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow AB = AC$

$\Rightarrow AB = AC = AD \Rightarrow A$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta BCD$ .



Hình 76

Xét đường tròn (A; AB) có  $\widehat{BDC} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$  (không đổi)

$\Rightarrow \widehat{BDC}$  có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

c) Xét đường tròn (O) có  $\widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AFB} (= \widehat{ACB})$ .

Dựa vào nhận xét của chuyên đề 12, bạn có thể chứng minh được AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta BEF$ .

d) Ta có  $\Delta ABE \sim \Delta AFB$  (g.g)  $\Rightarrow AB^2 = AE \cdot AF$ .

Kẻ  $OH \perp AB \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BOH} = \alpha$  và  $AB = 2 \cdot BH$ .

Mặt khác,  $BH = OB \cdot \sin \widehat{BOH} = R \cdot \sin \alpha$

$\Rightarrow AB = 2R \cdot \sin \alpha \Rightarrow AE \cdot AF = AB^2 = 4R^2 \cdot \sin^2 \alpha$ .

**Bài 5.** Phương trình hoành độ giao điểm là  $-x^2 = m \Leftrightarrow x^2 = -m$ .

Điều kiện để  $y = m$  cắt (P) tại hai điểm A; B phân biệt là  $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$ .

Khi đó  $A(-\sqrt{-m}; m)$ ,  $B(\sqrt{-m}; m)$ . Vì A, B đối xứng nhau qua trục tung suy ra  $OA = OB$ .

$$\Delta OAB \text{ đều} \Leftrightarrow OB = AB \Leftrightarrow \sqrt{-m+m^2} = 2\sqrt{-m} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -3. \end{cases}$$

Với  $m = -3$  thỏa mãn điều kiện, thì  $\Delta OAB$  đều.

Khi đó  $AB = 2\sqrt{3}$  và diện tích  $\Delta OAB$  là  $S = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$  (đvdt).



## Đề số 5

Bài 1. Điều kiện:  $x \geq 0$ ;  $x \neq 4$ ;  $P = \frac{x^2 - 9}{x - 4}$ .

$$a) P < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-3)}{x-4} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-4} < 0 \quad (\text{vì } x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ x-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4.$$

Không có giá trị nguyên nào của  $x$  để  $P < 0$ .

$$b) P \cdot (x-4) + 4y^2 - 4xy + 9 + |2x - y - 3| = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)^2 + |2x - y - 3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Bài 2. Gọi năng suất dự kiến theo kế hoạch là  $x$  (sản phẩm/ngày) ( $x$  nguyên dương). Dẫn tới phương trình :

$$\frac{2160}{x} - \frac{2160}{x+8} = 3.$$

Tìm được  $x_1 = -80$  (loại);  $x_2 = 72$  (thỏa mãn điều kiện).

### Bài 3.

$$a) \Delta = [-(3m-1)]^2 - 4(2m^2 - m) = (m-1)^2 \geq 0.$$

b) Theo hệ thức Vi-ét ta có :

$$x_1 + x_2 = 3m - 1; \quad x_1 x_2 = 2m^2 - m.$$

$$\text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (3m-1)^2 - 2(2m^2 - m) = 5m^2 - 4m + 1.$$

$$\text{Do đó } x_1^2 + x_2^2 = 2 \Leftrightarrow 5m^2 - 4m + 1 = 2 \Leftrightarrow 5m^2 - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1; m_2 = -\frac{1}{5}.$$

$$c) \text{ Ta có } x_1^2 + x_2^2 = 5m^2 - 4m + 1 = 5\left(m - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{5}.$$

$$\text{Suy ra } \min(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{5} \text{ khi } m = \frac{2}{5}.$$

**Bài 4.** (h.77) a)  $\widehat{MCN} = 90^\circ; \widehat{MDN} = 90^\circ$  nên tứ giác CMDN nội tiếp đường tròn đường kính MN.

b) Kẻ AP và BQ vuông góc với đường thẳng CD.

$\Rightarrow$  Tứ giác APQB là hình thang vuông có OH là đường trung bình

$\Rightarrow AP + BQ = 2OH;$

$\Delta OCD$  đều có OH là đường cao nên

$$OH = \frac{R\sqrt{3}}{2} \text{ không đổi}$$

$\Rightarrow AP + BQ = R\sqrt{3}$  không đổi.

c) Ta có  $OC = OD$  (bán kính),

$$HC = HD, IC = ID = \frac{1}{2}MN$$

$\Rightarrow O, H, I$  cùng thuộc đường trung trực của CD nên O, H, I thẳng hàng.

$$\text{Ta có: } \widehat{COD} = 60^\circ \Rightarrow \text{Sđ } \widehat{CD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = \frac{\text{sd}\widehat{AB} - \text{sd}\widehat{CD}}{2} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CMD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{CID} = 2\widehat{CMD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CIH} = \widehat{DIH} = 60^\circ.$$

$$\text{Trong } \Delta DIH \text{ vuông có } DH = DI \cdot \sin \widehat{DIH} \Rightarrow DI = \frac{R}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

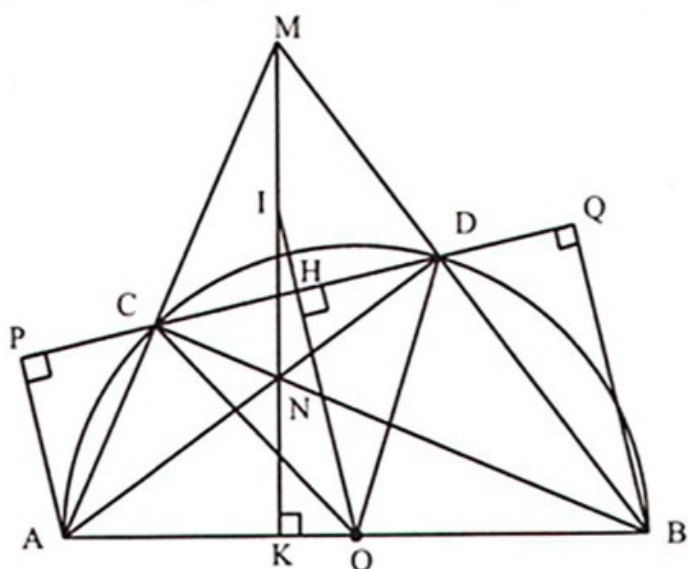
$$\text{a) } \Delta MCD \sim \Delta MBA \text{ (g.g) nên } \frac{S_{MCD}}{S_{MBA}} = \left(\frac{MD}{MA}\right)^2 = (\sin 30^\circ)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_{MCD} = \frac{1}{4} \cdot S_{MBA}.$$

$S_{MCD}$  lớn nhất khi  $S_{MBA}$  lớn nhất.

$$\text{Kẻ MN kéo dài cắt AB tại K} \Rightarrow S_{MBA} = \frac{1}{2}AB \cdot MK.$$

Mà M chạy trên cung chứa góc  $60^\circ$  dựng trên AB nên MK lớn nhất khi M là điểm chính giữa cung chứa góc  $60^\circ$  dựng trên đoạn AB.



Hình 77

$$\text{Khi đó } \Delta MAB \text{ đều} \Rightarrow MK = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{MBA} = R^2\sqrt{3} \Rightarrow S_{MCD} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy: Giá trị lớn nhất của diện tích  $\Delta MCD$  là  $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ , khi  $\Delta MAB$  đều

$$\Leftrightarrow \widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{BD}.$$

**Bài 5.** Từ  $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 2xy = (x+y)^2 - 4 = (x+y+2)(x+y-2)$ .

$$\text{Vì } x+y+2 \neq 0 \text{ nên } \frac{xy}{x+y+2} = \frac{x+y}{2} - 1. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức  $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ , ta có:

$$x+y \leq \sqrt{2(x^2+y^2)} \Rightarrow x+y \leq 2\sqrt{2}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta được: } \frac{xy}{x+y+2} \leq \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x = y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \max A = \sqrt{2} - 1.$$

## ĐỀ SỐ 6

$$\text{Bài 1. a) Điều kiện: } x > 0; x \neq 4; P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{b) } P > 2 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} > 2 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x}} > 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì  $x > 0$ . Vậy  $P > 2$ .

$$\text{c) } P\sqrt{x} = m \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = m \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 = m \quad (m > 0) \text{ suy ra } \sqrt{x} = \sqrt{m} - 1.$$

Vì  $x > 0$  nên  $\sqrt{x} > 0$ , do đó  $\sqrt{m} - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ .

Vì  $x \neq 4$  nên  $\sqrt{x} \neq 2$ , do đó  $\sqrt{m} - 1 \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 9$ .

Vậy nếu  $m > 1$  và  $m \neq 9$  thì tồn tại  $x$  để  $P\sqrt{x} = m$ .

**Bài 2.** a) Nếu  $m = 0$  thì hệ phương trình đã cho có nghiệm  $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2. \end{cases}$

Nếu  $m \neq 0$  thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất, vì  $\frac{m}{1} \neq \frac{-1}{m} \Leftrightarrow m^2 \neq -1$ .

Tóm lại, với mọi giá trị của  $m$  thì hệ phương trình đã cho đều có nghiệm.

b) Khi  $m = 2$  ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,8 \\ y = 1,6. \end{cases}$$

c) Rút  $x$  từ phương trình (2):  $x = 5 - my$ .

Thế vào (1) ta được:  $m(5 - my) - y = 2 \Rightarrow y = \frac{5m - 2}{m^2 + 1}$ .

Suy ra  $x = \frac{2m + 5}{m^2 + 1}$ .

Ta có  $x + y = 5 \Leftrightarrow \frac{2m + 5}{m^2 + 1} + \frac{5m - 2}{m^2 + 1} = 5 \Leftrightarrow 5m^2 - 7m + 2 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1; m_2 = \frac{2}{5}$ .

**Bài 3.** a) Xem hình 78.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$\frac{1}{2}x^2 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$ , có nghiệm

là  $x_1 = 4$ ;  $x_2 = -2$ .

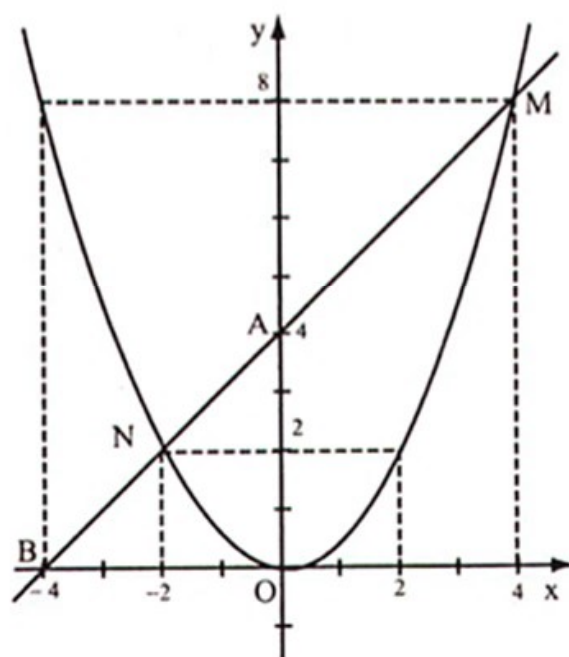
Suy ra  $y_1 = 8$ ;  $y_2 = 2$ .

Do đó tọa độ hai giao điểm của (P) và (d) là  $M(4;8)$ ;  $N(-2; 2)$ .

c)  $\triangle AOB$  vuông cân vì có  $OA = OB = 4$ .

Suy ra  $\widehat{ABO} = 45^\circ$ .

Vậy  $\alpha = 45^\circ$ .



Hình 78

**Bài 4.** (h.79) a)  $\widehat{AD} = \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CBD}$ .

$\Delta ABE$  có  $BD$  là đường phân giác đồng thời là đường cao  $\Rightarrow \Delta ABE$  cân.

b)  $AC = FC, BE \perp AF$

$\Rightarrow BE$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $AF$

$\Rightarrow EF = EA \Rightarrow \Delta AEF$  cân tại  $E$ , suy ra

$\widehat{EFA} = \widehat{EAF}$ . Mặt khác, ta có

$\widehat{EAF} = \widehat{CBD}$  (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\Rightarrow \widehat{EFA} = \widehat{CBD}$  hay  $\widehat{EFA} = \widehat{EBD}$ .

c)  $\Delta EFA$  cân tại  $E \Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{FEC}$ .

(1)

Ta có  $\widehat{EDH} = \widehat{ECH} = 90^\circ \Rightarrow$  Tứ giác  $EDHC$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{CHB}$ .

(2)

Ta có  $\widehat{BCH} = \widehat{BKH} = 90^\circ \Rightarrow$  Tứ giác  $BCHK$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{CHB} = \widehat{CKB}$ .

(3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra  $\widehat{IEB} = \widehat{IKB}$  Vậy tứ giác  $EIBK$  nội tiếp đường tròn.

d) Tứ giác  $EIBK$  nội tiếp có  $\widehat{EKB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EIB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{EBI}$  (cùng phụ với  $\widehat{FEB}$ ).

Mà  $\widehat{EFC} = \widehat{CBH}$  (câu b)  $\Rightarrow \widehat{CBH} = \widehat{EBI}$

$\Rightarrow \Delta CBH \sim \Delta IBE$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{EI}{BI} = \frac{CH}{BC}$ .

(1)

$\Delta BAF$  cân tại  $B \Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{BAC}$ .

Mà  $\widehat{BAC} = \widehat{BEK}$  (cùng phụ với  $\widehat{ABC}$ )  $\Rightarrow \Delta KEB \sim \Delta CFB$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{EK}{BK} = \frac{CF}{BC}$ .

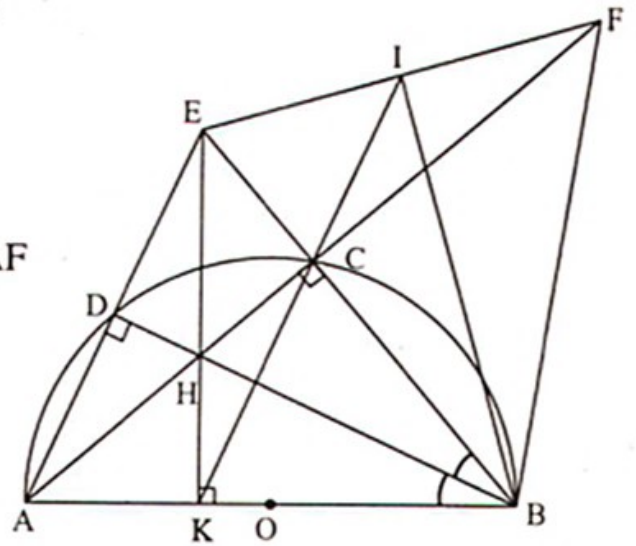
(2)

Từ (1) và (2) suy ra:  $\frac{EI}{BI} + \frac{EK}{BK} = \frac{CH}{BC} + \frac{CF}{BC} = \frac{HF}{BC}$ .

**Bài 5.** Điều kiện:  $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$  (1).

Đặt  $a = \sqrt{x+1}$ ;  $b = \sqrt{x^2 - x + 1}$ , ( $a \geq 0$ ;  $b > 0$ ) (2)  $\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 2$ .

Khi đó phương trình đã cho trở thành:  $10.ab = 3.(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a - 3b)(3a - b) = 0$



Hình 79

$\Leftrightarrow a = 3b$  hoặc  $b = 3a$ .

- Nếu  $a = 3b$  thì từ (2) suy ra:  $\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 9x^2 - 10x + 8 = 0$  (vô nghiệm).
- Nếu  $b = 3a$  thì từ (2) suy ra:

$$3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 9x+9 = x^2-x+1 \Leftrightarrow x^2-10x-8=0.$$

Phương trình có hai nghiệm  $x_1 = 5 + \sqrt{33}$ ;  $x_2 = 5 - \sqrt{33}$  (thỏa mãn (1)).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x_1 = 5 + \sqrt{33}$  và  $x_2 = 5 - \sqrt{33}$ .

**Nhận xét.** Phương trình đã cho đưa về dạng tổng quát sau:

$$\alpha.P(x) + \beta.Q(x) + \gamma.\sqrt{P(x)Q(x)} = 0$$

( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ ). Để giải phương trình này, có hai hướng giải:

**Cách 1.** Đặt  $a = \sqrt{P(x)}$ ,  $b = \sqrt{Q(x)}$ , phương trình có dạng

$$\alpha.a^2 + \beta.b^2 + \gamma.ab = 0,$$

sau đó phân tích đa thức thành nhân tử.

**Cách 2.** Đặt  $\sqrt{P(x)} = t.\sqrt{Q(x)}$ , phương trình có dạng  $\alpha.t^2 + \beta + \gamma.t = 0$ , sau đó tìm  $t$ .

## ĐỀ SỐ 7

### Bài I.

1. Thay  $x = 36$  vào biểu thức A. Tính được:  $A = \frac{5}{4}$ .

2. Kết quả rút gọn  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$ .

3. Rút gọn, ta được  $B(A-1) = \frac{2}{x-16}$ .

$B(A-1)$  là số nguyên  $\Leftrightarrow x-16$  là ước của 2. Lập luận suy ra được:  $x$  nhận các giá trị 17; 15; 18; 14.

**Bài II.** Gọi thời gian để người thứ nhất làm một mình xong công việc là  $x$  (giờ,  $x > 0$ ).

Suy ra thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là  $x+2$  (giờ).

Lập luận đi đến phương trình  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}$ .

Giải phương trình, ta được:  $x_1 = 4$  (thỏa mãn)  $x_2 = -\frac{6}{5}$  (không thỏa mãn).

Vậy người thứ nhất làm một mình xong công việc trong 4 giờ, người thứ hai làm một mình xong công việc trong 6 giờ.

**Bài III.**

1. Điều kiện:  $x \neq 0, y \neq 0$ . Đặt  $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$ . Ta có hệ:  $\begin{cases} 2u + v = 2 \\ 6u - 2v = 1 \end{cases}$ .

Giải ra ta được:  $\begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = 1 \end{cases}$  suy ra  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$  là nghiệm của hệ phương trình.

2. Ta có:  $\Delta = 4m^2 + 1 > 0$  với mọi  $m$  nên phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  phân biệt với mọi  $m$ . Theo định lí Vi-ét:

$$x_1^2 + x_2^2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 7 \Leftrightarrow (4m - 1)^2 - 2(3m^2 - 2m) = 7.$$

Giải ra ta được:  $m_1 = 1, m_2 = -\frac{3}{5}$ . Vậy có hai giá trị  $m$  thỏa mãn điều kiện đề bài:

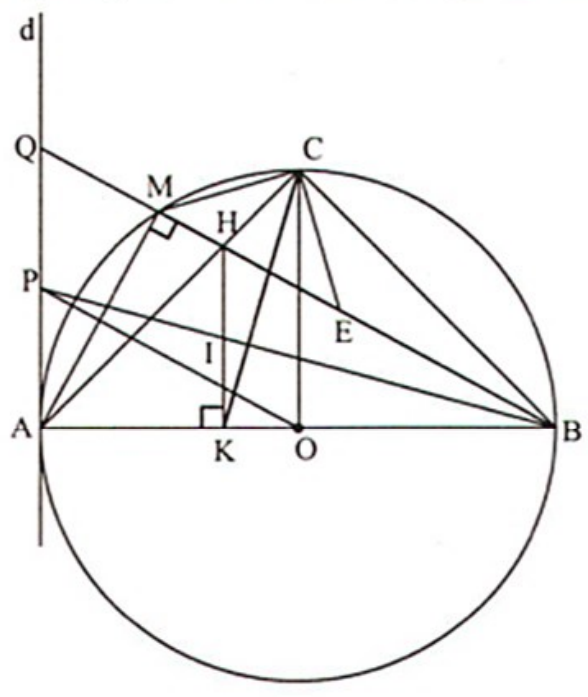
$$m_1 = 1, m_2 = -\frac{3}{5}.$$

**Bài IV. (h.80)**

1.  $\widehat{ACB} = 90^\circ, \widehat{HKB} = 90^\circ \Rightarrow$  tứ giác CBKH nội tiếp đường tròn đường kính BH.

2.  $\widehat{MCA} = \widehat{MBA}$  (góc nội tiếp chắn cung AM),  $\widehat{ACK} = \widehat{MBA}$  (tứ giác CBKH nội tiếp). Suy ra  $\widehat{MCA} = \widehat{ACK}$ .

3.  $\Delta MAC = \Delta EBC$  (c.g.c)  $\Rightarrow MC = CE$ , mà  $\widehat{CME} = 45^\circ$  suy ra  $\Delta ECM$  vuông cân tại C.



Hình 80

4. Từ  $\frac{AP \cdot MB}{MA} = R \Rightarrow \frac{AP}{MA} = \frac{OA}{MB}$ , mà  $\widehat{PAO} = \widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow \Delta PAO \sim \Delta AMB$

(c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{POA} = \widehat{ABM} \Rightarrow PO \parallel MB$ .

Gọi Q là giao điểm của BM và d. Vì O là trung điểm của AB nên P là trung điểm của AQ.

Gọi I là giao điểm HK và BP. Theo định lí Ta-lét, ta có:  $\frac{HI}{PQ} = \frac{IK}{AP} \left( = \frac{BI}{BP} \right)$ , mà

$PQ = AP$  nên  $HI = IK$ . Suy ra điều phải chứng minh.

**Bài V.** Ta có:  $M = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{3x}{4y} + \left( \frac{x}{4y} + \frac{y}{x} \right)$ .

Mà  $x \geq 2y \Rightarrow \frac{3x}{4y} \geq \frac{3}{2}$ ;  $\frac{x}{4y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y} \cdot \frac{y}{x}} = 1 \Rightarrow M \geq \frac{5}{2}$ . Khi  $x = 2y$  thì  $M = \frac{5}{2}$ .

Vậy giá trị lớn nhất của M là  $\frac{5}{2}$  khi  $x = 2y > 0$ .

## Đề số 8

**Câu 1.** Đáp án

a) Kết quả:  $x_1 = -1; x_2 = \frac{3}{2}$ .

b) Kết quả:  $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$

c) Kết quả:  $x_1 = \sqrt{3}; x_2 = -\sqrt{3}$ .

d) Kết quả:  $x_1 = \sqrt{2} - 3; x_2 = \sqrt{2} + 3$ .

**Câu 2.**

a) Bạn đọc tự vẽ đồ thị.

b) hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Giải ra ta được:  $x_1 = 2; x_2 = -4$ . Từ đó ta tính được:  $y_1 = 1; y_2 = 4$ .

Vậy tọa độ của các giao điểm là A(2; 1), B(-4; 4).



**Câu 3.** Ta có  $A = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$

$$= \frac{\sqrt{x}-1+2x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Ta có:  $B = (2-\sqrt{3})\sqrt{(2+\sqrt{3})^3} - (2+\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})^3}$

$$\Rightarrow B = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\sqrt{2+\sqrt{3}} - (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}B = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1) = 2$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{2}.$$

**Câu 4. a)** Ta có  $\Delta = (2m-1)^2 + 7 > 0$  với mọi  $m$  nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

b) Theo hệ thức Vi-ét ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 2. \end{cases}$$

Ta có  $M = \frac{-24}{(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2} = \frac{-24}{4m^2 - 8(m-2)} = \frac{-6}{m^2 - 2m + 4}$

$$M = \frac{-6}{(m-1)^2 + 3} \geq -2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $M$  là  $-2$  khi  $m = 1$ .

**Câu 5. (h.81) a)** Ta có  $\triangle MAE \sim \triangle MFB$  (g.g) nên

$$\frac{MA}{ME} = \frac{MF}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = ME \cdot MF.$$

b)  $\triangle MCA \sim \triangle MBC$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow MC^2 = MA \cdot MB.$

$\triangle MCO$  vuông tại  $C$  có  $CH \perp MO$  nên  $MC^2 = MH \cdot MO.$

Suy ra  $MA \cdot MB = MH \cdot MO$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MH} = \frac{MO}{MB}, \text{ mà } \widehat{BMF} \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \Delta MHA \sim \Delta MBO \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MHA} = \widehat{MBO}$$

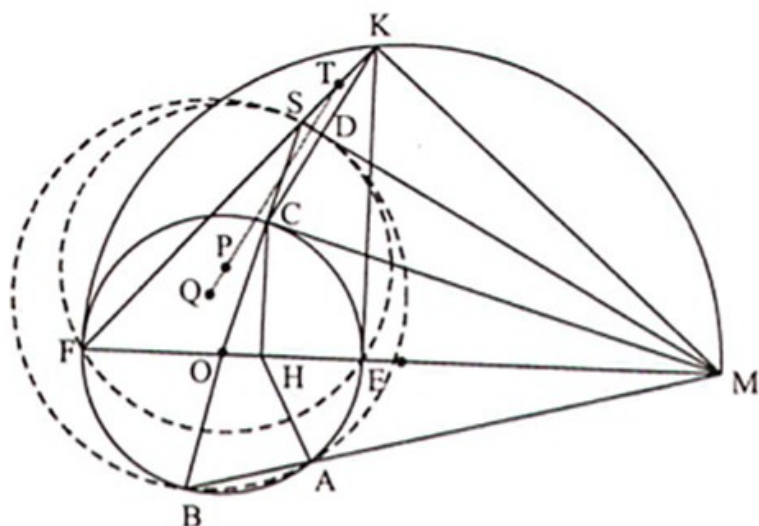
$\Rightarrow$  Tứ giác AHOB nội tiếp.

c)  $\Delta MKF$  vuông tại K có  $KE \perp MF$

$$\Rightarrow MK^2 = ME \cdot MF,$$

$$\text{mà } MC^2 = MA \cdot MB = ME \cdot MF$$

$$\Rightarrow MK = MC.$$



Hình 81

$\Delta MCS$  và  $\Delta MKS$  có  $\widehat{MCS} = \widehat{MKS} = 90^\circ$ , MS chung, MC = MK

$\Rightarrow \Delta MCS = \Delta MKS \Rightarrow SC = SK \Rightarrow MS$  là đường trung trực của CK  $\Rightarrow MS \perp KC$ .

d) Giả sử MS vuông góc với KC tại D.

Vì  $ME \cdot MF = MA \cdot MB = MS \cdot MD (= MC^2)$  nên các đường tròn (P), (Q) đi qua D.

Suy ra  $PQ \perp MS$  và PQ là đường trung trực của SD (đường nối tâm của hai đường tròn) nên PQ cũng đi qua trung điểm của KS (định lý đường trung bình của  $\Delta SKD$ ). Vậy ba điểm T, Q, P thẳng hàng.

## Đề số 9

### Câu 1.

a) Ta có: 
$$P = \sqrt{a-b} \left( \frac{1}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

b) Từ  $a = b + 1$ , áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$P = \frac{(b+1)^2 + b^2}{b} = 2b + \frac{1}{b} + 2 \geq 2\sqrt{2b \cdot \frac{1}{b}} + 2 = 2\sqrt{2} + 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là  $2\sqrt{2} + 1$  khi  $a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Câu 2. Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h), vận tốc của ô tô là y (km/h) ( $x > 0, y > 0$ ).

Theo đề bài ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{9y}{4} + 4x = 210 \\ \frac{9y}{4x} = \frac{4x}{y} \end{cases}$$

Giải ra ta được :  $\begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases}$  thỏa mãn điều kiện.

Vậy vận tốc của xe máy là 30 km/h, vận tốc của ô tô là 40 km/h.

**Câu 3.** Số giao điểm của (d) và (P) là số nghiệm của phương trình:  $-x^2 = mx - m - 2$   
 $\Leftrightarrow x^2 + mx - m - 2 = 0$ . Ta có  $\Delta = (m + 2)^2 + 4 > 0$  với mọi m.

Ta suy ra điều phải chứng minh.

Theo định lí Vi-ét, ta có :  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = -(m + 2) \end{cases}$

Vì vậy  $|x_1 - x_2| = \sqrt{20} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 20 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$

$\Leftrightarrow m = 2$  hoặc  $m = -6$ .

**Câu 4.** (h.82)

a) Do tứ giác AKOL nội tiếp nên

$$\begin{aligned} \widehat{MON} &= \widehat{MOE} + \widehat{EON} = \frac{1}{2}\widehat{EOL} + \frac{1}{2}\widehat{EOL} = \frac{1}{2}\widehat{KOL} \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BAC}) = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}. \end{aligned}$$

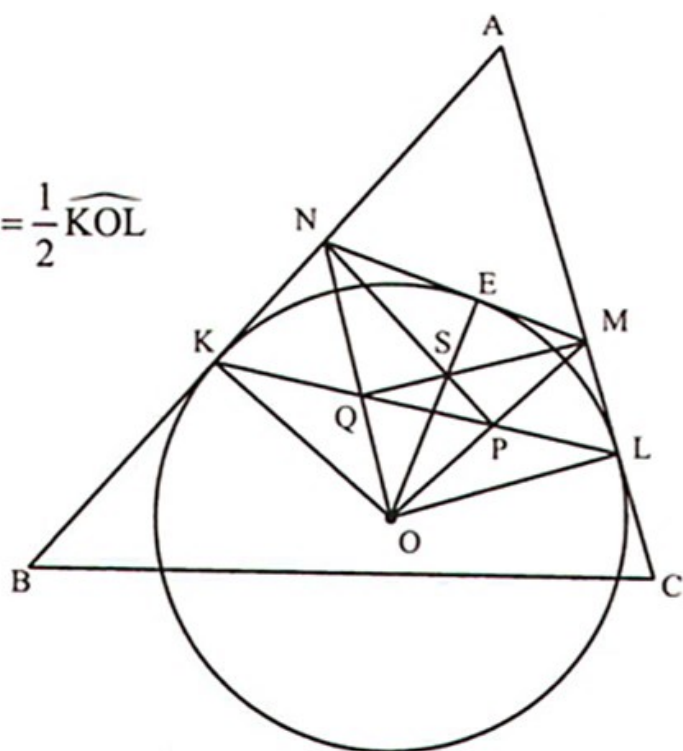
b) Tam giác KAL cân tại A nên

$$\widehat{QLM} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} \Rightarrow \widehat{QLM} = \widehat{QOM}.$$

Vậy tứ giác MLOQ nội tiếp, suy ra

$$\widehat{MQO} = 90^\circ \Rightarrow MQ \perp NO.$$

Tương tự ta có  $NP \perp MO$ , mà  $OE \perp MN$  suy ra MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.



Hình 82

c) Từ  $\Delta MPL \sim \Delta QNK$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{ML}{PL} = \frac{KQ}{NK} \Rightarrow KQ \cdot PL = ML \cdot NK = ME \cdot EN$ .

**Câu 5.** Từ giả thiết suy ra  $x > y > 0$  và áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= xy(x - y)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4xy \left[ (x + y)^2 - 4xy \right] \\ &\leq \frac{1}{4} \left( \frac{4xy + (x + y)^2 - 4xy}{2} \right)^2 = \frac{1}{16} (x + y)^4. \end{aligned}$$

Suy ra  $x + y \geq 4$ . Từ đó giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi  $x = 2 + \sqrt{2}$ ;  $y = 2 - \sqrt{2}$ .

## Đề số 10

Câu 1:

1) a) Đặt  $y = x^2$ ,  $y \geq 0$ . Phương trình trở thành  $y^2 - y - 20 = 0$ . Tìm được  $y = 5$ .

Từ đó  $x \in \{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\}$ .

$$\text{b) } \sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = (x-1)^2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

2) Từ (2) suy ra  $y = |x| + 3$ . Do đó  $y \geq 3$  nên  $|y-3| = y-3$ .

Trừ theo vế của (1) cho (2) ta được

$$\begin{cases} |x| = \frac{1}{2} \\ y = |x| + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Câu 2: 1)  $9 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 3 \Rightarrow m = \pm 3$ .

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với (P) là

$$x^2 = mx \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = m.$$

Từ đó có tọa độ hai giao điểm là A (0 ; 0), B (m; m<sup>2</sup>) với  $m \neq 0$ .

Ta có  $AB = \sqrt{6} \Leftrightarrow m^2 + m^4 = 6 \Leftrightarrow m^2 = 2$ . Vậy  $m = \pm\sqrt{2}$ .

Câu 3:

$$1) P = \frac{2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2\sqrt{3}}{4 - 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2.$$

2) Ta có:

$$a^5 + b^5 - a^3b^2 - a^2b^3 = (a^2 - b^2)(a^3 - b^3) = (a+b)(a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$$

(vì  $a + b \geq 0$  (giả thiết),  $(a - b)^2 \geq 0$  và  $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$ ).

Vậy  $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3$ .

**Câu 4.** (h.83)

1) Vì  $\widehat{ADE} = \widehat{AHE} = \widehat{ACB}$  nên tứ giác BDEC nội tiếp.

2) Vì  $\widehat{DAE} = 90^\circ$  nên DE là một đường kính của đường tròn(O). Vậy D, O, E thẳng hàng.

3) Ta có:  $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4(\text{cm})$ ,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 6(\text{cm}^2) \text{ và}$$

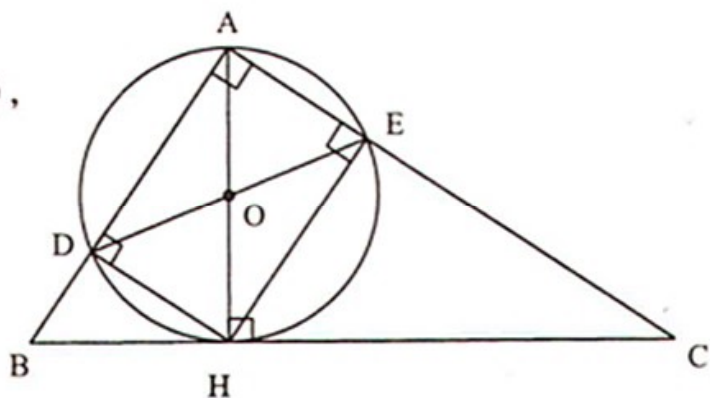
$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}(\text{cm}).$$

Vì  $\triangle AED \sim \triangle ABC$  nên

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \left(\frac{ED}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AH}{BC}\right)^2 = \left(\frac{12}{25}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_{AED} = \left(\frac{12}{25}\right)^2 S_{ABC} = \frac{144}{625} \cdot 6 = \frac{864}{625}(\text{cm}^2).$$

$$\text{Vậy } S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} = 6 - \frac{864}{625} = \frac{2886}{625}(\text{cm}^2).$$



Hình 83

## MỤC LỤC

	Trang	
<b>LỜI NÓI ĐẦU</b>	3	
<b>PHẦN MỘT. CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ</b>	LT-BT	LG-ĐS
Chuyên đề 1. Rút gọn và tính giá trị của biểu thức	5	113
Chuyên đề 2. Giải phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn	12	117
Chuyên đề 3. Phương trình bậc hai một ẩn	20	120
Chuyên đề 4. Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình	27	123
Chuyên đề 5. Hàm số và đồ thị	35	127
Chuyên đề 6. Chứng minh bất đẳng thức	41	130
Chuyên đề 7. Giải bất phương trình	46	133
Chuyên đề 8. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức	51	135
Chuyên đề 9. Giải toán có nội dung số học	57	139
<b>PHẦN HAI. CÁC CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC</b>		
Chuyên đề 10. Chứng minh các hệ thức hình học	62	142
Chuyên đề 11. Chứng minh tứ giác nội tiếp và nhiều điểm cùng nằm trên đường tròn	69	147
Chuyên đề 12. Chứng minh quan hệ tiếp xúc giữa đường thẳng và đường tròn hoặc hai đường tròn	75	149
Chuyên đề 13. Chứng minh điểm cố định	81	153
Chuyên đề 14. Các bài tập có nội dung tính toán	86	156
Chuyên đề 15. Quỹ tích và dựng hình	91	159

Chuyên đề 16. Bài toán cực trị hình học	97	163
<b>PHẦN BA. MỘT SỐ ĐỀ THAM KHẢO</b>		
Đề số 1	103	168
Đề số 2	104	170
Đề số 3	105	173
Đề số 4	106	175
Đề số 5	107	177
Đề số 6	108	179
Đề số 7	109	182
Đề số 8	110	184
Đề số 9	111	186
Đề số 10	112	188

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

*Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:*

Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH

Giám đốc Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHAN KẾ THÁI

*Biên tập nội dung:*

NGUYỄN XUÂN BÌNH – NGUYỄN TRỌNG THIỆP

*Sửa bản in:*

NGUYỄN XUÂN BÌNH – NGUYỄN TRỌNG THIỆP

*Trình bày bìa:*

VÂN ANH

*Chế bản:*

NGUYỄN ANH

Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội —  
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

---

**16 CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO LỚP 10 – MÔN TOÁN**

---

**Mã số : TXT78H3 - NBE**

Số đăng kí KHXB : 227-2013/CXB/61-205/GD

In 3.000 bản, (QĐ22TK), khổ 17 x 24 cm tại Công ty TNHH In & DVTM Phú Thịnh

In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2013