

# **TOÁN LỚP 9**

**(Giữa Học Kỳ I)**

**Năm học 2021 - 2022**

## Phần A- ĐẠI SỐ

### Chương I: CĂN BẬC HAI - CĂN BẬC BA

#### 1. Định nghĩa, tính chất căn bậc hai

- ❖ Cho  $a$  là một biểu thức đại số, người ta gọi  $\sqrt{a}$  được gọi là căn bậc hai số học của  $a$ .
- ❖ Với  $a \geq 0$  ta có  $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = (\sqrt{a})^2 = a \end{cases}$
- ❖ Với hai số  $a$  và  $b$  không âm, ta có:  $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
- ❖  $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ nếu } a \geq 0 \\ -a \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$

#### 2. Các công thức biến đổi căn thức

- $\sqrt{A^2} = |A|$
- $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$
- $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$
- $\sqrt{A^2B} = |A| \sqrt{B} \quad (B \geq 0)$
- $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$  và  $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B} \quad (A < 0, B \geq 0)$
- $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} \quad (AB \geq 0, B \neq 0)$
- $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2} \quad (A \geq 0, A \neq B^2)$
- $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (B > 0)$
- $\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \mp \sqrt{B}})}{A - B} \quad (A, B \geq 0, A \neq B)$

#### Ví dụ 1. Tìm các giá trị của $x$ để biểu thức sau có nghĩa:

a)  $\sqrt{2x-1}$

b)  $\frac{1}{\sqrt{x-7}}$

**Giải**

a)  $\sqrt{2x-1}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

b)  $\frac{1}{\sqrt{x-7}}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-7} \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \neq 7 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 49 \\ x \geq 0 \end{cases}$

#### Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức:

a)  $\sqrt{45} - \sqrt{20}$

b)  $(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) + 2$

c)  $\frac{1}{2}\sqrt{6} - \sqrt{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{\frac{2}{3}}$

d)  $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

**Giải**

a)  $\sqrt{45} - \sqrt{20} = \sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{4 \cdot 5} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (3+2)\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

b)  $(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) + 2 = \sqrt{3}^2 - \sqrt{5}^2 + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$

$$c) \frac{1}{2}\sqrt{6} - \sqrt{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - \sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2^2}} + 3\sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{6} + 3 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

$$d) \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{8+2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}^2} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

**Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức:**

$$a) \frac{\sqrt{21} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} - 1} - \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{5}}$$

$$b) 5\sqrt{2x} - 2\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} \text{ với } x \geq 0$$

$$c) \left( \frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab} - b} \right) (a\sqrt{b} - b\sqrt{a})$$

**Giải**

a) Gọi ý: Phân tích  $\sqrt{21} - \sqrt{3}$  và  $\sqrt{15} - \sqrt{3}$  thành nhân tử rồi rút gọn cho mẫu.

$$b) 5\sqrt{2x} - 2\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} = 5\sqrt{2x} - 2\sqrt{4 \cdot 2x} + 7\sqrt{9 \cdot 2x} = 5\sqrt{2x} - 2 \cdot 2\sqrt{2x} + 7 \cdot 3\sqrt{2x} \\ = (5 - 4 + 21)\sqrt{2x} = 22\sqrt{2x}$$

$$c) \left( \frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab} - b} \right) (a\sqrt{b} - b\sqrt{a}) = \left( \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \right) \sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \\ = \left( \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} - \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \right) \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} - \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = b - a \text{ (rút gọn tử và mẫu)}$$

**Ví dụ 4. Giải phương trình:**

$$a) 5\sqrt{2x+1} = 21$$

$$b) \sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + 7\sqrt{9x+45} = 20$$

**Giải**

$$a) 5\sqrt{2x+1} = 21 \Leftrightarrow 5\sqrt{2x} = 21 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x} = \frac{20}{5} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2} = 4^2 \Leftrightarrow 2x = 16$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16}{2} = 8$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm  $x = 8$

$$b) \text{ĐK: } x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$$

$$\sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + 7\sqrt{9x+45} = 20 \Leftrightarrow \sqrt{4(x+5)} - 3\sqrt{5+x} + 7\sqrt{9(x+5)} = 20$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{5+x} + 7 \cdot 3\sqrt{x+5} = 20$$

$$\Leftrightarrow (2 - 3 + 21)\sqrt{x+5} = 20 \Leftrightarrow 20\sqrt{x+5} = 20 \Leftrightarrow \sqrt{x+5} = 1 \Leftrightarrow x+5 = 1 \Leftrightarrow x = 1 - 5 = -4 \text{ (thỏa ĐK)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm  $x = -4$

① **Tìm điều kiện xác định:** Với giá trị nào của  $x$  thì các biểu thức sau đây xác định:

**Bài 1.** Với giá trị nào của  $x$  thì các biểu thức sau đây xác định:

$$1) \sqrt{-2x+3} \quad 2) \sqrt{\frac{2}{x^2}} \quad 3) \sqrt{\frac{4}{x+3}} \quad 4) \sqrt{3x+4}$$

$$5) \sqrt{1+x^2} \quad 6) \sqrt{\frac{3}{1-2x}} \quad 7) \sqrt{-2x} \quad 8) \sqrt{15x}$$

$$9) \sqrt{2x+1} \quad 10) \frac{3}{\sqrt{x^2-1}} \quad 11) \sqrt{2x^2+3} \quad 12) \frac{5}{\sqrt{-x^2-2}}$$

**Bài 2. Tìm x để các biểu thức sau có nghĩa:**

- |                   |                           |                            |                              |
|-------------------|---------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 1) $\sqrt{-2x+3}$ | 2) $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$ | 3) $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$  | 4) $\sqrt{\frac{-5}{x^2+6}}$ |
| 5) $\sqrt{3x+4}$  | 6) $\sqrt{1+x^2}$         | 7) $\sqrt{\frac{3}{1-2x}}$ | 8) $\sqrt{\frac{-3}{3x+5}}$  |

**② Rút gọn biểu thức**

**Bài 1. Thu gọn các biểu thức sau:**

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1) $\sqrt{12} + 5\sqrt{3} - \sqrt{48}$    | 2) $5\sqrt{5} + \sqrt{20} - 3\sqrt{45}$ | 3) $2\sqrt{32} + 4\sqrt{8} - 5\sqrt{18}$ |
| 4) $3\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{48}$ | 5) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$  | 6) $2\sqrt{18} - 7\sqrt{2} + \sqrt{162}$ |
| 7) $3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + 4\sqrt{5}$  | 8) $(\sqrt{2} + 2)\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$ | 9) $(\sqrt{19} - 3)(\sqrt{19} + 3)$      |

**Bài 2. Trục các căn thức sau:**

- |   |  |
|---|--|
| a) $\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{6}}; \frac{3}{\sqrt{15}}$  | b) $\frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{3}{2\sqrt{5}}; \frac{4}{3\sqrt{6}}; \frac{3}{2\sqrt{15}}$                       |
| c) $\frac{12}{5\sqrt{2}}; \frac{31}{3\sqrt{5}}; \frac{4}{15\sqrt{6}}; \frac{3-\sqrt{2}}{6\sqrt{15}}$  | d) $\frac{12}{\sqrt{5}-1}; \frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}}; \frac{3}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}; \frac{5}{\sqrt{2}+1}$ |
| e) $\frac{2}{\sqrt{5}+1}; \frac{3+\sqrt{2}}{2+3\sqrt{6}}; \frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}+1}$   | f) $\frac{12}{3-\sqrt{3}}; \frac{2}{3+\sqrt{3}}; \frac{15}{5-2\sqrt{3}}; \frac{24}{5-\sqrt{5}}$                |
| g) $\frac{7\sqrt{3}-5\sqrt{11}}{8\sqrt{3}-7\sqrt{11}}; \frac{7\sqrt{3}-\sqrt{11}}{8\sqrt{3}-\sqrt{11}}; \frac{\sqrt{3}-5\sqrt{11}}{\sqrt{3}+7\sqrt{11}}; \frac{7\sqrt{3}-5\sqrt{11}}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}$ |  |
| h) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}; \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{4\sqrt{2}-3\sqrt{5}}; \frac{14}{\sqrt{10}+\sqrt{3}}; \frac{12}{3-\sqrt{3}}$  |  |

**Bài 3. Trục căn thức ở mẫu và thực hiện phép tính:**

- |   |  |  |
|---|--|--|
| a) $\frac{1}{\sqrt{5}-2} + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$  | b) $\frac{2}{4-3\sqrt{2}} - \frac{2}{4+3\sqrt{2}}$   | c) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ |
| d) $\frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1}$  | e) $\frac{1}{3-\sqrt{7}} - \frac{1}{3+\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$                                   | f) $\frac{2}{\sqrt{5}-2} - \frac{2}{\sqrt{5}+2}$   |
| g) $\frac{10}{\sqrt{11}-\sqrt{6}} + \frac{10}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$                                    | h) $\frac{5}{4-\sqrt{11}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} - \frac{6}{\sqrt{7}-2} - \frac{\sqrt{7}-5}{2}$                  |  |
| i) $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{5}-2} - \frac{2}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{3}-1}{6}$ | j) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+5}$ |  |

**Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:**

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$ | 2) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$ | 3) $\sqrt{(5-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}$        |
| 4) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+3)^2}$ | 5) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ | 6) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$ |

$$7) \sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}} \qquad 8) \sqrt{(5+2\sqrt{6})} + \sqrt{8-2\sqrt{15}}$$

$$9) \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{8}}$$

**③ Giải phương trình:**

**Phương pháp:**

- $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B;$
- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$
- $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}$
- $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B \text{ hay } A = -B$
- $\sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B; \quad |A| = A \text{ khi } A \geq 0; \quad |a| = -A \text{ khi } A \leq 0.$
- $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$
- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \text{ hay } A = -B \end{cases}$
- $|A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

**Bài 1. Giải các phương trình sau:**

- 1)  $\sqrt{2x-1} = \sqrt{5}$       2)  $\sqrt{x-5} = 3$       3)  $\sqrt{9(x-1)} = 21$       4)  $\sqrt{2x} - \sqrt{50} = 0$
- 5)  $\sqrt{3x^2} - \sqrt{12} = 0$       6)  $\sqrt{(x-3)^2} = 9$       7)  $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 6$       8)  $\sqrt{(2x-1)^2} = 3$
- 9)  $\sqrt{4x^2} = 6$       10)  $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$       11)  $\sqrt[3]{x+1} = 2$       12)  $\sqrt[3]{3-2x} = -2$

**Bài 2. Giải các phương trình sau:**

- a)  $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$       b)  $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5$       c)  $\sqrt{1-12x+36x^2} = 5$

**Bài 3. Giải các phương trình sau:**

- a)  $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x}$       b)  $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{3-x}$       c)  $\sqrt{2x^2-3} = \sqrt{4x-3}$
- d)  $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}$       e)  $\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{x-3}$       f)  $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{3x-5}$

**Bài 4. Giải các phương trình sau:**

- a)  $\sqrt{x^2+x} = x$       b)  $\sqrt{1-x^2} = x-1$       c)  $\sqrt{x^2-4x+3} = x-2$
- d)  $\sqrt{x^2-1} - x^2 + 1 = 0$       e)  $\sqrt{x^2-4} - x + 2 = 0$       f)  $\sqrt{1-2x^2} = x-1$

**Bài 5. Giải các phương trình sau:**

- a)  $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2-1$       b)  $\sqrt{4x^2-4x+1} = x-1$       c)  $\sqrt{x^4-2x^2+1} = x-1$
- d)  $\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} = x$       e)  $\sqrt{x^4-8x^2+16} = 2-x$       f)  $\sqrt{9x^2+6x+1} = \sqrt{11-6\sqrt{2}}$

**Bài 6. Giải các phương trình sau:**

- a)  $|3x+1| = |x+1|$       b)  $|x^2-3| = |x-\sqrt{3}|$
- c)  $\sqrt{9x^2-12x+4} = \sqrt{x^2}$       d)  $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{4x^2-12x+9}$

**Bài 7. Giải các phương trình sau:**

- a)  $|x^2-1| + |x+1| = 0$       b)  $\sqrt{x^2-8x+16} + |x+2| = 0$

c)  $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x+1} = 0$

d)  $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0$

**CÁC BÀI TOÁN RÚT GON:**

**A. Các bước thực hiện:**

- ① Tìm ĐKXD của biểu thức: là tìm TXĐ của từng phân thức rồi kết luận lại.
- ② Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (rồi rút gọn nếu được)
- ③ Quy đồng, gồm các bước:  
+ Chọn mẫu chung : là tích các nhân tử chung và riêng, mỗi nhân tử lấy số mũ lớn nhất.  
+ Tìm nhân tử phụ: lấy mẫu chung chia cho từng mẫu để được nhân tử phụ tương ứng.  
+ Nhân nhân tử phụ với tử – Giữ nguyên mẫu chung.
- ④ Bỏ ngoặc: bằng cách nhân đa thức hoặc dùng hằng đẳng thức.
- ⑤ Thu gọn: là cộng trừ các hạng tử đồng dạng.
- ⑥ Phân tích tử thành nhân tử (mẫu giữ nguyên).
- ⑦ Rút gọn.

**B. Bài tập luyện tập:**

**Bài 1. Cho biểu thức:**  $A = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$  với ( $x > 0$  và  $x \neq 1$ )

- a) Rút gọn biểu thức A;                      b) Tính giá trị của biểu thức A tại  $x = 3 + 2\sqrt{2}$ .

**Bài 2. Cho biểu thức :**  $P = \frac{a+4\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2} + \frac{4-a}{2-\sqrt{a}}$  ( Với  $a \geq 0$  ;  $a \neq 4$  )

- a) Rút gọn biểu thức P;                      b) Tìm giá trị của a sao cho  $P = a + 1$ .

**Bài 3: Cho biểu thức:**  $A = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

- a) Đặt điều kiện để biểu thức A có nghĩa;                      b) Rút gọn biểu thức A;  
c) Với giá trị nào của x thì  $A < -1$ .

**Bài 4. Cho biểu thức:**  $B = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} - \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{1-x}$

- a) Tìm TXĐ rồi rút gọn biểu thức B;                      b) Tính giá trị của B với  $x = 3$ ;  
c) Tìm giá trị của x để  $|A| = \frac{1}{2}$ .

**Bài 5. Cho biểu thức:**  $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$

- a) Tìm TXĐ;                      b) Rút gọn P;                      c) Tìm x để  $P = 2$ .

**Bài 6. Cho biểu thức:**  $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{a-1}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a-2}} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a-1}}\right)$

- a) Tìm TXĐ rồi rút gọn Q;                                      b) Tìm a để Q dương;  
c) Tính giá trị của biểu thức biết  $a = 9 - 4\sqrt{5}$ .

**Bài 7. Cho biểu thức:**  $K = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

- a) Tìm x để K có nghĩa;      b) Rút gọn K;                      c) Tìm x khi  $K = \frac{1}{2}$ ;  
d) Tìm giá trị lớn nhất của K.

**Bài 8. Cho biểu thức:**  $G = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right) \cdot \frac{x^2-2x+1}{2}$

- a) Xác định x để G tồn tại;                                      b) Rút gọn biểu thức G;  
c) Tính giá trị của G khi  $x = 0,16$ ;                              d) Tìm giá trị lớn nhất của G;  
e) Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để G nhận giá trị nguyên;  
f) Chứng minh rằng: Nếu  $0 < x < 1$  thì M nhận giá trị dương;  
g) Tìm x để G nhận giá trị âm;

**Bài 9. Cho biểu thức:**  $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$  Với  $x \geq 0$ ;  $x \neq 1$

- a) Rút gọn biểu thức trên;                      b) Chứng minh rằng  $P > 0$  với mọi  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$ .

**Bài 10. Cho biểu thức:**  $Q = \left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a}\right)$

- a) Tìm a để Q tồn tại;                                      b) Chứng minh rằng Q không phụ thuộc vào giá trị của a.

**Bài 11. Cho biểu thức:**

$$A = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{xy}-2y} + \frac{2x}{2\sqrt{xy}+2\sqrt{y}-x-\sqrt{x}} \cdot \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

- a) Rút gọn A                                      b) Tìm các số nguyên dương x để  $y = 625$  và  $A < 0,2$

**Bài 12. Xét biểu thức:**  $P = \left[\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-4} + \frac{4(a+2)}{16-a}\right] : \left(1 - \frac{2\sqrt{a}+5}{\sqrt{a}+4}\right)$  (Với  $a \geq 0$ ;  $a \neq 16$ )

- 1) Rút gọn P;                                      2) Tìm a để  $P = -3$ ;

**Phần B - HÌNH HỌC**

**CHƯƠNG I: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG**

**I. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG**

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

- Định lý Pi-ta-go:  $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- $AB^2 = BC.BH$ ;      $AC^2 = BC.CH$      •  $AH^2 = BH.CH$
- $AB.AC = BC.AH$      •  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

**Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 3cm, BC = 5cm. AH là đường cao. Tính BH, CH, AC và AH.

*HD: BH = 1,8cm, CH = 3,2cm, AC = 4cm, AH = 2,4cm.*

**Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 10cm, AB = 8cm. AH là đường cao. Tính BC, BH, CH, AH.

*HD: BC = 2√41; BH = 32√41/41 ; CH = 50√41/41; AH = 40√41/41.*

**Bài 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = 12cm. Tính chiều dài hai cạnh góc vuông biết  $AB = \frac{2}{3} AC$ .

*HD: AB =  $\frac{24\sqrt{13}}{13}$  (cm), AC =  $\frac{36\sqrt{13}}{13}$  (cm).*

**Bài 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Biết BH = 10cm, CH = 42 cm. Tính BC, AH, AB và AC.

*HD: BC = 52cm, AH = 2√105cm, AB = 2√130cm, AC = 2√546cm.*

**Bài 5.** Hình thang cân ABCD có đáy lớn AB = 30cm, đáy nhỏ CD = 10cm và góc A là 60°  
a) Tính cạnh BC.     b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Tính MN.

**Bài 6.** Cho tứ giác lồi ABCD có AB = AC = AD = 10cm, góc B bằng 60° và góc A là 90°  
a) Tính đường chéo BD.     b) Tính các khoảng cách BH và DK từ B và D đến AC.  
c) Tính HK.     d) Vẽ BE ⊥ DC kéo dài. Tính BE, CE và DC.

**Bài 7.** Cho đoạn thẳng AB = 2a. Từ trung điểm O của AB vẽ tia Ox ⊥ AB. Trên Ox, lấy điểm D sao cho  $OD = \frac{a}{2}$ . Từ B kẻ BC vuông góc với đường thẳng AD.

- a) Tính AD, AC và BC theo a.
- b) Kéo dài DO một đoạn OE = a. Chứng minh bốn điểm A, B, C và E cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết  $\frac{AB}{AC} = \frac{20}{21}$  và AH = 420. Tính chu vi tam giác ABC.

**Bài 9.** Cho hình thang ABCD vuông góc tại A và D. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết  $AB = 2\sqrt{13}$ , OA = 6, tính diện tích hình thang ABCD.

**II. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN**

**1. Định nghĩa:** Cho tam giác vuông có góc nhọn α.



$$\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}; \quad \tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \quad \cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$$

**Chú ý:**

- Cho góc nhọn  $\alpha$ . Ta có:  $0 < \sin \alpha < 1$ ;  $0 < \cos \alpha < 1$ .
- Cho 2 góc nhọn  $\alpha, \beta$ . Nếu  $\sin \alpha = \sin \beta$  (hoặc  $\cos \alpha = \cos \beta$ , hoặc  $\tan \alpha = \tan \beta$ , hoặc  $\cot \alpha = \cot \beta$ ) thì  $\alpha = \beta$ .

**2. Tỷ số lượng giác của hai góc phụ nhau:**

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cot \alpha(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

Ví dụ:  $\sin 25^\circ = \cos 65^\circ$ ;  $\tan 20^\circ = \cot 70^\circ \dots$

**3. Tỷ số lượng giác của các góc đặc biệt:**

TS \ LG \ $\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

**4. Một số hệ thức lượng giác**

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

**5. Công thức tính diện tích tam giác:**

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B = P \cdot r = \frac{abc}{4R}$$

R: Bán kính đường tròn ngoại tiếp, r: Bán kính đường tròn nội tiếp.

(Diện tích tam giác bằng một nửa tích hai cạnh kề với sin góc xen giữa hai cạnh đó).

Trong tam giác bất kì:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = 2R$$

Với a là cạnh đối diện góc A, b là cạnh đối diện góc B, c là cạnh đối diện góc C.

**BÀI TẬP:**

**Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết BH = 64cm và CH = 81cm. Tính các cạnh và góc tam giác ABC.

*HD:*  $AB^2 = BH \cdot BC$  nên  $AB = 96,3\text{cm}$ ;  $AC^2 = HC \cdot BC$  nên  $AC = 108,4\text{cm}$

$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{108,4}{145} = 0,75$  nên  $\hat{C} = 41^\circ$ ;  $\hat{B} = 49^\circ$ .

**Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm các tỉ số lượng giác của góc B khi:

- a) BC = 5cm, AB = 3cm.    b) BC = 13 cm, AC = 12 cm.    c) AC = 4cm, AB = 3cm.

HD: a)  $\sin B = 0,8$ ;  $\cos B = 0,6$

**Bài 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 10cm và AC = 15cm.

- a) Tính góc B.    b) Phân giác trong góc B cắt AC tại I. Tính AI.  
c) Vẽ AH  $\perp$  BI tại H. Tính AH.

HD:

$$a, \tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{10} \text{ nên } \hat{B} = 56^\circ.$$

$$b, \tan \widehat{ABI} = \frac{AI}{AB} \text{ nên } AI = AB \cdot \tan \widehat{ABI} = 10 \cdot \tan 28^\circ = 5,3 \text{ cm}$$

$$c, \sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} \text{ nên } AH = AB \cdot \sin \widehat{ABH} = 10 \cdot \sin 28^\circ = 4,7 \text{ cm}.$$

**Bài 4.** Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $\cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 55^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ$ .

b)  $\sin^2 10^\circ - \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ - \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$ .

c)  $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ - \cos 15^\circ - \cos 75^\circ + \sin 30^\circ$

d)  $\sin 35^\circ + \sin 67^\circ - \cos 23^\circ - \cos 55^\circ$

e)  $\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ$

f)  $\sin 20^\circ - \tan 40^\circ + \cot 50^\circ - \cos 70^\circ$

HD: Dùng công thức:  $\sin(90^\circ - a) = \cos a$ ;  $\tan(90^\circ - a) = \cot a$ .

a)

$$\cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ + (\cos^2 25^\circ + \cos^2 65^\circ) + (\cos^2 35^\circ + \cos^2 55^\circ) + \cos^2 45^\circ =$$

$$(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ) + (\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ) + \cos^2 45^\circ = 1 + 1 +$$

$$1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$$

b)  $-\frac{3}{4}$     c) 0,5    d) 0    e) 2    f) 0.

**Bài 5.** Cho biết một tỉ số lượng giác của góc nhọn  $\alpha$ , tính các tỉ số lượng giác còn lại của  $\alpha$ :

- a)  $\sin \alpha = 0,8$     b)  $\cos \alpha = 0,6$     c)  $\tan \alpha = 3$     d)  $\cot \alpha = 2$

**Bài 6.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$     b)  $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$     c)  $\sin \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha$

d)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$     e)  $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha$     f)  $\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha \cos^2 \alpha$

**Bài 7.** Chứng minh các hệ thức sau:

a)  $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$

b)  $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 4$

**Bài 8.** Cho tam giác nhọn ABC. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C.

a) Chứng minh:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .

b) Có thể xảy ra đẳng thức  $\sin A = \sin B + \sin C$  không?

c) Chứng minh:  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$  (Diện tích tam giác bằng một nửa tích hai cạnh kề với sin góc xen giữa hai cạnh đó).

### III. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = a, AC = b, AB = c.



$$\begin{aligned}b &= a \sin B = a \cos C; & c &= a \sin C = a \cos B \\b &= c \tan B = c \cot C; & c &= b \tan C = b \cot B\end{aligned}$$

### **BÀI TẬP:**

**Bài 1.** Giải tam giác vuông ABC, biết góc  $A=90^\circ$  và:

a)  $a=15cm, b=10cm$                                 b)  $b=12cm, c=7cm$

**Bài 2.** Cho tam giác ABC có góc  $B=60^\circ, C=50^\circ, AC=35cm$ . Tính diện tích tam giác ABC.

**Bài 3.** Cho tứ giác ABCD có góc  $A=D=90^\circ, C=40^\circ, AB=4cm, AD=3cm$ . Tính diện tích tứ giác.

**Bài 4.** Cho tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết  $AC=4cm, BD=5cm$ , góc  $AOB=50^\circ$ . Tính diện tích tứ giác ABCD.

**Bài 5.** Chứng minh rằng:

- a) Diện tích của một tam giác bằng nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.  
 b) Diện tích của một hình bình hành bằng tích của hai cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

### **BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I**

**Bài 1.** Cho tam giác ABC có  $AB=21m, AC=28m, BC=35m$ .

- a) Chứng minh tam giác ABC vuông.      b) Tính  $\sin B, \sin C$ .

**Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Cho biết  $HB=112, HC=63$ .

- a) Tính độ dài AH.                                      b) Tính độ dài AD.

**Bài 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết  $AH=5, CH=6$ .

- a) Tính AB, AC, BC, BH.                              b) Tính diện tích tam giác ABC.

**Bài 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết  $AH=16, BH=25$ .

- a) Tính AB, AC, BC, CH.                              b) Tính diện tích tam giác ABC.

**Bài 5.** Cho hình thang ABCD có góc  $A=D=90^\circ$  và hai đường chéo vuông góc với nhau tại O.

- a) Chứng minh hình thang này có chiều cao bằng trung bình nhân của hai đáy.  
 b) Cho  $AB=9, CD=16$ . Tính diện tích hình thang ABCD.  
 c) Tính độ dài các đoạn thẳng OA, OB, OC, OD.

**Bài 6.** Tính diện tích hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ), biết  $AB=10, CD=27, AC=12, BD=35$ .

**Bài 7.** Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.

- a) Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.  
 b) Tính khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

**Bài 8.** Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết góc  $A=48^\circ, AH=13cm$ . Tính chu vi  $\triangle ABC$

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A,  $AB=a, AC=3a$ . Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho  $AD=DE=EC$ .

- a) Chứng minh  $\frac{DE}{DB} = \frac{DB}{DC}$ .                                      b) Chứng minh  $\triangle BDE$  đồng dạng  $\triangle CDB$ .

c) Tính tổng góc (AEB+BCD)

**Bài 10.** Cho hình thang ABCD có hai cạnh bên AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết  $AD=5a, AC=12a$ .

a) Tính  $\frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$ .

b) Tính diện tích hình thang ABCD.

**Bài 12.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua điểm B. Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho HE = 2HA. Gọi I là hình chiếu của D trên HE.

a) Tính AB, AC, HC, biết AH = 4cm, HB = 3cm.

b) Tính  $\tan \widehat{IED}$ ;  $\tan \widehat{HEC}$

c) Chứng minh  $\widehat{IED} = \widehat{HEC}$

d) Chứng minh:  $DE \perp EC$ .

Cho tam giác ABC vuông tại A ( $AB < AC$ ), đường cao AH. Đặt  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $AH = h$ . Chứng minh rằng tam giác có các cạnh  $a-h$ ,  $b-c$ ,  $h$  là một tam giác vuông.

**Bài 13.** Cho tam giác nhọn ABC, diện tích bằng 1. Vẽ ba đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng:

a)  $S_{AEF} + S_{BFD} + S_{CDE} = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ . b)  $S_{DEF} = \sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$ .

**Bài 14.** Giải tam giác ABC, biết:

a)  $\widehat{A} = 90^\circ$ ;  $BC = 10\text{cm}$ ;  $\widehat{B} = 75^\circ$       b)  $\widehat{A} = 120^\circ$ ;  $AB = AC = 6\text{cm}$ .

c) Trung tuyến ứng với cạnh huyền  $m_a = 5$ , đường cao AH = 4.

d) Trung tuyến ứng với cạnh huyền  $m_a = 5$ , một góc nhọn bằng  $47^\circ$ .

**Bài 15.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, AB = 3cm, BC = 6cm. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC.

a) Giải tam giác vuông ABC.

b) Tính độ dài AH và chứng minh:  $EF = AH$ .

c) Tính:  $EA \cdot EB + AF \cdot FC$ .